N° C.N.R.S. :

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Jean ZIRPHILE

Ingénieur I.E.G. - Ingénieur I.A.G.

TITRE

Contribution à l'étude du traitement d'informations utilisant la représentation stochastique

---

Soutenue le 1er Mars 1972, devant la Commission d'examen

JURY

MM. R. PAUTHENET	*Président*
R. PERRET C. FOULARD	*Examinateurs*
M. NOUGARET R. ROUXEL	*Invités*

N° C.N.R.S :

THÈSE

présentée

A L'UNIVERSITÉ SCIENTIFIQUE ET MÉDICALE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE GRADE DE DOCTEUR-INGÉNIEUR

PAR

Jean ZIRPHILE

Ingénieur I.E.G. - Ingénieur I.A.G.

TITRE

Contribution à l'étude du traitement d'informations utilisant la représentation stochastique

---

Soutenue le 1er Mars 1972, devant la Commission d'examen

JURY

MM. R. PAUTHENET	*Président*
R. PERRET C. FOULARD	*Examinateurs*
M. NOUGARET R. ROUXEL	*Invités*

UNIV. LEIDEN BIBL.

Le travail présenté dans cette thèse a été effectué au Département d'Automatique et d'Electronique de la Direction des Recherches de la Société ALSTHOM.

Je tiens à exprimer ma très profonde gratitude à Monsieur ROUXEL, Directeur du Département d'Automatique et d'Electronique, qui a bien voulu m'accueillir dans son équipe et grâce à qui cette étude a pu être effectuée, pour la confiance qu'il m'a accordée.

Je prie Monsieur le Professeur PAUTHENET, Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure d'Electrotechnique et de Génie Physique, d'accepter mes plus sincères remerciements pour l'honneur qu'il me fait en présidant ce jury de thèse.

Monsieur le Professeur PERRET m'a fait bénéficier de son enseignement lors de mon passage à la Section Spéciale d'Automatique qu'il dirige. Je désire lui exprimer toute ma reconnaissance et lui adresser mes remerciements pour l'honneur qu'il me fait en examinant ce mémoire et en participant au jury.

Monsieur FOULARD, Maître de Conférences, a bien voulu se charger de la direction de ce travail. Je l'en remercie vivement, ainsi que de la compréhension qu'il m'a accordée.

Monsieur NOUGARET, Maître Assistant, a accepté d'examiner ce mémoire. Je tiens à l'en remercier, ainsi que des commentaires judicieux qu'il a bien voulu me faire.

Je tiens à remercier toute l'équipe du Département d'Automatique et d'Electronique de la Direction des Recherches de la Société ALSTHOM, chercheurs, techniciens et secrétaires, pour l'aide, les conseils et surtout la symphatie qu'ils m'ont accordés. Je remercie tout particulièrement Monsieur HIRSCH, qui fut à l'origine de cette étude, et dont la collaboration m'a été précieuse. J'adresse ma profonde gratitude à Monsieur BELMONTE, qui s'est chargé de la réalisation technologique et qui a permis, par ses connaissances techniques et son aide constante, de mener à bien ce travail.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41544309_0037

UNIVERSITE SCIENTIFIQUE ET MEDICALE DE GRENOBLE

LISTE DES PROFESSEURS

Président : Monsieur Michel SOUTIF

Vice-Président : Monsieur Gabriel CAU

PROFESSEURS TITULAIRES

MM.	ANGLES D'AURIAC Paul	Mécanique des fluides
	ARNAUD Georges	Clinique des maladies infectieuses
	ARNAUD Paul	Chimie
	AUBERT Guy	Physique
	AYANT Yves	Physique approfondie
Mme.	BARBIER Marie-Jeanne	Electrochimie
MM.	BARBIER Jean-Claude	Physique expérimentale
	BARBIER Reynold	Géologie appliquée
	BARJON Robert	Physique nucléaire
	BARNOUD Fernand	Biosynthèse de la cellulose
	BARRA Jean-René	Statistiques
	BARRIE Joseph	Clinique chirurgicale
	BENOIT Jean	Radioélectricité
	BERNARD Alain	Mathématiques Pures
	BESSON Jean	Electrochimie
	BEZES Henri	Chirurgie générale
	BLAMBERT Maurice	Mathématiques Pures
	BOLLIET Louis	Informatique (IUT B)
	BONNET Georges	Electrotechnique
	BONNET Jean-Louis	Clinique ophtalmologique
	BONNET-EYMARD Joseph	Pathologie médicale
	BONNIER Etienne	Electrochimie Electrométallurgie
	BOUCHERIE André	Chimie et Toxicologie
	BOUCHEZ Robert	Physique nucléaire
	BRAVARD Yves	Géographie
	BRISSONNEAU Pierre	Physique du Solide
	BUYLE-BODIN Maurice	Electronique
	CABANAC Jean	Pathologie chirurgicale
	CABANEL Guy	Clinique rhumatologique et hydrologie
	CALAS François	Anatomie
	CARRAZ Gilbert	Biologie animale et pharmacodynamie
	CAU Gabriel	Médecine légale et Toxicologie
	CAUQUIS Georges	Chimie organique
	CHABAUTY Claude	Mathématiques Pures
	CHARACHON Robert	Oto-Rhino-Laryngologie
	CHATEAU Robert	Thérapeutique
	CHENE Marcel	Chimie papetière
	COEUR André	Pharmacie chimique
	CONTAMIN Robert	Clinique gynécologique
	COUDERC Pierre	Anatomie Pathologique
	CRAYA Antoine	Mécanique
Mme.	DEBELMAS Anne-Marie	Matière médicale
MM.	DEBELMAS Jacques	Géologie générale
	DEGRANGE Charles	Zoologie
	DESSAUX Georges	Physiologie animale

MM.	DODU Jacques	Mécanique appliquée
	DOLIQUE Jean-Michel	Physique des plasmas
	DREYFUS Bernard	Thermodynamique
	DUCROS Pierre	Cristallographie
	DUGOIS Pierre	Clinique de Dermatologie et Syphiligraphie
	FAU René	Clinique neuro-psychiatrique
	FELICI Noël	Electrostatique
	GAGNAIRE Didier	Chimie physique
	GALLISSOT François	Mathématiques Pures
	GALVANI Octave	Mathématiques Pures
	GASTINEL Noël	Analyse numérique
	GERBER Robert	Mathématiques Pures
	GIRAUD Pierre	Géologie
	KLEIN Joseph	Mathématiques Pures
Mme.	KOFLER Lucie	Botanique et Physiologie végétale
MM.	KOSZUL Jean-Louis	Mathématiques Pures
	KRAVTCHENKO Julien	Mécanique
	KUNTZMANN Jean	Mathématiques Appliquées
	LACAZE Albert	Thermodynamique
	LACHARME Jean	Biologie végétale
	LATREILLE René	Chirurgie générale
	LATURAZE Jean	Biochimie pharmaceutique
	LAURENT Pierre	Mathématiques Appliquées
	LEDRU Jean	Clinique médicale B
	LLIBOUTRY Louis	Géophysique
	LOUP Jean	Géographie
Mle.	LUTZ Elisabeth	Mathématiques Pures
MM.	MALGRANGE Bernard	Mathématiques Pures
	MALINAS Yves	Clinique obstétricale
	MARTIN-NOEL Pierre	Seméiologie médicale
	MASSEPORT Jean	Géographie
	MAZARE Yves	Clinique médicale A
	MICHEL Robert	Minéralogie et Pétrographie
	MOURIQUAND Claude	Histologie
	MOUSSA André	Chimie nucléaire
	NEEL Louis	Physique du Solide
	OZENDA Paut	Botanique
	PAUTHENET René	Electrotechnique
	PAYAN Jean-Jacques	Mathématiques Pures
	PEBAY-PEYROULA Jean-Claude	Physique
	PERRET René	Servomécanismes
	PILLET Emile	Physique industrielle
	RASSAT André	Chimie systématique
	RENARD Michel	Thermodynamique
	REULOS René	Physique industrielle
	RINALDI Renaud	Physique
	ROGET Jean	Clinique de pédiatrie et de puériculture
	SANTON Lucien	Mécanique
	SEIGNEURIN Raymond	Microbiologie et Hygiène
	SENGEL Philippe	Zoologie
	SILBERT Robert	Mécanique des fluides
	SOUTIF Michel	Physique générale
	TANCHE Maurice	Physiologie
	TRAYNARD Philippe	Chimie générale
	VAILLAND François	Zoologie
	VALENTIN Jacques	Physique Nucléaire
	VAUQUOIS Bernard	Calcul électronique

Mme.	VERAIN Alice	Pharmacie galénique
M.	VERAIN André	Physique
Mme.	VEYRET Germaine	Géographie
MM.	VEYRET Paul	Géographie
	VIGNAIS Pierre	Biochimie gmédicale
	YOCCOZ Jean	Physique nucléaire théorique

PROFESSEURS ASSOCIES

MM.	BULLEMER Bernard	Physique
	HANO JUN-ICHI	Mathématiques Pures
	STEPHENS Michaël	Mathématiques Appliquées

PROFESSEURS SANS CHAIRE

MM.	BEAUDOING André	Pédiatrie
Mme.	BERTRANDIAS Françoise	Mathématiques Pures
MM.	BERTRANDIAS Jean-Paul	Mathématiques Appliquées
	BIAREZ Jean-Pierre	Mécanique
	BONNETAIN Lucien	Chimie minérale
Mme.	BONNIER Jane	Chimie générale
MM.	CARLIER Georges	Biologie végétale
	COHEN Joseph	Electrotechnique
	COUMES André	Radioélectricité
	DEPASSEL Roger	Mécanique des fluides
	DEPORTES Charles	Chimie minérale
	DESRE Pierre	Métallurgie
	GAUTHIER Yves	Sciences biologiques
	GEINDRE Michel	Electroradiologie
	GERMAIN Jean-Pierre	Mécanique
	GIDON Paul	Géologie et Minérologie
	GLENAT René	Chimie organique
	HACQUES Gérard	Calcul numérique
	JANIN Bernard	Géographie
Mme.	KAHANE Josette	Physique
MM.	MULLER Jean-Michel	Thérapeutique
	PERRIAUX Jean-Jacques	Géologie et minéralogie
	POULOUJADOFF Michel	Electrotechnique
	REBECQ Jacques	Biologie (CUS)
	REVOL Michel	Urologie
	REYMOND Jean-Charles	Chirurgie générale
	ROBERT André	Chimie papetière
	SARRAZIN Roger	Anatomie et chirurgie
	SARROT-REYNAULD Jean	Géologie
	SIBILLE Robert	Construction mécanique
	SIROT Louis	Chirurgie générale
Mme.	SOUTIF Jeanne	Physique générale

MAITRES DE CONFERENCES ET MAITRES DE CONFERENCES AGREGES

Mle.	AGNIUS-DELORD Claudine	Physique pharmaceutique
	ALARY Josette	Chimie analytique
MM.	AMBLARD Pierre	Dermatologie
	AMBROISE-THOMAS Pierre	Parasitologie
	ARMAND Yves	Chimie
	BEGUIN Claude	Chimie organique
	BELORIZKY Elie	Physique
	BENZAKEN Claude	Mathématiques Appliquées
	BILLET Jean	Géographie
	BLIMAN Samuel	Electronique (EIE)
	BLOCH Daniel	Electrotechnique
Mme.	BOUCHE Liane	Mathématiques (CUS)
MM.	BOUCHET Yves	Anatomie
	BOUSSARD Jean-Claude	Mathématiques Appliquées
	BOUVARD Maurice	Mécanique des fluides
	BRIERE Geogres	Physique expérimentale
	BRODEAU François	Mathématiques (IUT B)
	BRUGEL Lucien	Energétique
	BUISSON Roger	Physique
	BUTEL Jean	Orthopédie
	CHAMBAZ Edmond	Biochimie médicale
	CHAMPETIER Jean	Anatomie et organogénèse
	CHIAVERINA Jean	Biologie appliquée (EFP)
	CHIBON Pierre	Biologie animale
	COHEN-ADDAD Jean-Pierre	Spectrométrie physique
	COLOMB Maurice	Biochimie médicale
	CONTE René	Physique
	CROUZET Guy	Radiologie
	DURAND Francis	Métallurgie
	DUSSAUD René	Mathématiques (CUS)
Mme.	ETERRADOSSI Jacqueline	Physiologie
MM.	FAURE Jacques	Médecine légale
	GAVEND Michel	Pharmacologie
	GENSAC Pierre	Botanique
	GIDON Maurice	Géologie
	GRIFFITHS Michaël	Mathématiques Appliquées
	GROULADE Joseph	Biochimie médicale
	GUITTON Jacques	Electrochimie
	HOLLARD Daniel	Hématologie
	HUGONOT Robert	Hygiène et Médecine préventive
	IDELMAN Simon	Physiologie animale
	IVANES Marcel	Electricité
	JALBERT Pierre	Histologie
	JOLY Jean-René	Mathématiques Pures
	JOUBERT Jean-Claude	Physique du Solide
	JULLIEN Pierre	Mathématiques Pures
	KAHANE André	Physique générale
	KUHN Gérard	Physique
Mme.	LAJZEROWICZ Jeannine	Physique
MM.	LAJZEROWICZ Joseph	Physique
	LANCIA Roland	Physique atomique
	LE JUNTER Noël	Electronique
	LEROY Philippe	Mathématiques

MM.	LOISEAUX Jean-Marie	Physique nucléaire
	LONGEQUEUE Jean-Pierre	Physique nucléaire
	LUU DUC Cuong	Chimie organique
	MACHE Régis	Physiologie végétale
	MAGNIN Robert	Hygiène et Médecine préventive
	MARECHAL Jean	Mécanique
	MARTIN-BOUYER Michel	Chimie (CUS)
	MAYNARD Roger	Physique du solide
	MICHOULIER Jean	Physique (IUT A)
	MICOUD Max	Maladies infectieuses
	MOREAU René	Hydraulique (INP)
	NEGRE Robert	Mécanique
	PARAMELLE Bernard	Pneumologie
	PECCOUD François	Analyse (IUT B)
	PEFFEN René	Métallurgie
	PELMONT Jean	Physiologie animale
	PERRET Jean	Neurologie
	PERRIN Louis	Pathologie expérimentale
	PFISTER Jean-Claude	Physique du solide
	PHELIP Xavier	Rhumatologie
Mle	PIERY Yvette	Biologie animale
MM.	RACHAIL Michel	Médecine interne
	RACINET Claude	Gynécologie et obstétrique
	RICHARD Lucien	Botanique
Mme.	RINAUDO Marguerite	Chimie macromoléculaire
MM.	ROMIER Guy	Mathématiques (IUT B)
	ROUGEMONT (DE) Jacques	Neuro-Chirurgie
	SHAN Jean Claude	Chimie générale
	STIEGLITZ Paul	Anesthésiologie
	STOEBNER Pierre	Anatomie pathologique
	VAN CUTSEM Bernard	Mathématiques appliquées
	VEILLON Gérard	Mathématiques appliquées (INP)
	VIALON Pierre	Géologie
	VOOG Robert	Médecine interne
	VROUSSOS Constantin	Radiologie
	ZADWARNY François	Electronique

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

MM.	BOUDOURIS Georges	Radioélectricité
	CHEEKE John	Thermodynamique
	GOLDSCHMIDT Hubert	Mathématiques
	SIDNEY STUARD	Mathématiques Pures
	YACOUD Mahmoud	Médecine légale

CHARGES DE FONCTIONS DE MAITRES DE CONFERENCES

Mme.	BERIEL Hélène	Physiologie
	RENAUDET Jacqueline	Microbiologie
MM.	COULOMB Max	Biologie animale
	BOUCHARLAT Jacques	Psychiatrie adultes

INTRODUCTION

1. Représentation stochastique de l'information

1.1. Définition et Principe

1.2. Différents modes de représentation de grandeurs algébriques

1.3. Principes du codage et du décodage

2. Choix d'une représentation. Conceptions aléatoire et pseudo-aléatoire

3. Etude du générateur de bruit

3.1. Introduction

3.2. Registres à décalage contre-réactionnés

3.3. Utilisation en générateur de bruit numérique

3.4. Méthodes de codage

3.5. Obtention de séquences pseudo-indépendantes

3.6. Utilisation des tables de décalage

3.7. Réalisation des décalages

3.8. Conclusion de l'étude du générateur de bruit

4. Etudes en simulation. Analyse de la précision

4.1. Problème de la précision

4.2. Cas d'un filtrage passe-bas

4.3. Cas de la lecture d'un intégrateur

4.4. Etudes en simulation

5. Etude et réalisation d'un module M.I.M.

5.1. Description des diverses fonctions

5.2. Résultats obtenus

5.3. Caractéristiques du M.I.M opérationnel

6. Applications à la conception de structures de calcul utilisant la représentation stochastique

6.1. Découpage du problème

6.2. Etude d'un exemple : système d'équations aux dérivées partielles

6.3. Perspectives en matière de calculateurs en représentation stochastique

6.4. Perspectives en matière d'opérateurs spécialisés

CONCLUSION

INTRODUCTION

Jusqu'à présent, deux types principaux de représentation de l'information ont été utilisés en vue d'un traitement par calculateur. D'une part, la représentation analogique associe à l'information une grandeur physique continue (le plus souvent une tension électrique). Le traitement s'effectue à l'aide de phénomènes physiques qui ont une représentation mathématique "analogue" aux opérations à réaliser. D'autre part, la représentation numérique associe à l'information un certain nombre de signaux électriques binaires (tout ou rien) et pondérés. Les opérations sont cette fois transcrites en fonctions booléennes de ces signaux tout ou rien.

Ces deux modes de représentation conduisent à des organisations de calcul très différentes : le découpage d'un problème en tâches élémentaires est fait spatialement en calcul analogique, séquentiellement en calcul numérique. Le calculateur analogique se présente sous la forme d'un réseau d'opérateurs interconnectés et fonctionnant en parallèle. Le calculateur numérique possède une unité de calcul où toutes les tâches sont traitées successivement ; chaque résultat partiel est stocké dans une mémoire.

Il semblerait logique que cette différence d'organisation impose des domaines d'application spécifiques. Certains problèmes se présentent en effet sous une forme séquentielle et unidimensionnelle ; d'autres sous une forme parallèle et combinatoire. Pourtant, les techniques numériques débordent très largement du cadre des problèmes unidimensionnels. Ceci est dû aux différences de performances des deux types de calcul, dont l'origine paraît être l'amélioration des circuits logiques électroniques. Compte tenu de la rapidité de l'organe de calcul d'un calculateur numérique et de ses possibilités de mémorisation celui-ci est devenu un calculateur "universel". Bon nombre de problèmes à aspect combinatoire sont résolus à l'aide des techniques numériques, les techniques analogiques étant limitées en précision et stabilité et surtout en volume d'opérateurs.

Néanmoins, l'inadaptation du calculateur numérique traditionnel a conduit à la conception de techniques de calcul hybride et à de nouvelles structures de calcul utilisant d'autres représentations de l'information. Ces représentations ont un support binaire, comme la représentation numérique, mais conduisent à des opérateurs plus simples et de coût moins élevé (calculatrices cellulaires, analyseur différentiel numérique, etc...). L'idée de base de ces structures de calcul consiste à remplacer l'unique organe de calcul très performant en plusieurs organes, moins performants, mais fonctionnant en parallèle. Les avantages d'une représentation à l'aide de signaux binaires sont conservés, mais on retrouve ici les structures parallèles propres au calcul analogique.

La représentation stochastique de l'information se range dans cette catégorie. Elle associe en effet à l'information un train d'impulsions binaires aléatoires dont la valeur moyenne est représentative de l'information à coder. Cette définition montre bien le caractère hybride de la représentation stochastique : le support de l'information est binaire, mais l'information est représentée par une valeur moyenne, grandeur continue et estimable physiquement, caractère d'une représentation analogique. Nous verrons que ce caractère hybride permet d'obtenir très facilement le décodage de la représentation stochastique, tant vers une information numérique que vers une information analogique. Ceci permet un dialogue facile entre un calculateur stochastique et tout autre calculateur, ou un opérateur humain.

La principale caractéristique de la représentation stochastique de l'information, en matière de traitement réside dans l'extrême simplicité des opérateurs. Par exemple, l'opération de multiplication de deux valeurs moyennes de séquences aléatoires pourra être réalisée par une simple fonction portant sur les séquences elles mêmes, sous réserve de conditions d'indépendance stochastique.

Cet aspect de la représentation stochastique entre bien dans l'idée de calculateurs décentralisés, à multiples organes de calcul fonctionnant en parallèle. Les opérateurs sont très simples et bon marché, permettant leur emploi en grand nombre dans un même calculateur. La forme analogique de cette représentation montre bien la possibilité d'organisation parallèle du calcul.

Les limitations des performances de la représentation stochastique proviennent principalement du problème du décodage. La transmission de l'information est essentiellement du type série et, par ailleurs, le décodage consiste en une estimation de la valeur moyenne d'une suite d'échantillons aléatoires, dont la fréquence d'apparition est bien entendu limitée par des impératifs technologiques. Cette estimation de valeur moyenne en temps fini introduit des fluctuations statistiques dont l'amplitude est fonction du rapport entre le temps d'estimation et la période d'apparition des échantillons. Nous voyons ici se poser le problème du compromis précision - vitesse de la représentation stochastique.

Nous pensons cependant qu'il existe actuellement un besoin d'éléments de calcul bon marché, dont les performances sont compatibles avec l'emploi de la représentation stochastique (quelques dizaines de Hz pour une précision de 1 %). Ceci d'autant plus que, comme pour un calculateur analogique, la rapidité du calculateur en représentation stochastique est à priori indépendante de la complexité du problème à résoudre s'il s'agit d'un problème multidimensionnel (structure parallèle du calcul). En calcul numérique, cette rapidité décroît lorsque la complexité du problème croît. Ainsi, la réalisation de modèles de processus physico-chimiques complexes, en temps réel, mobilise le calculateur numérique de contrôle pendant une grande partie de son temps.

C'est là un premier domaine d'application du calcul en représentation stochastique, sous la forme de réalisation d'organes de calcul spécialisés, fonctionnant comme périphériques de calculateur. Ces organes spécialisés pourraient décharger le calculateur numérique de tâches pour lesquelles il paraît moins bien adapté, au profit des fonctions de contrôle et de décision, qui entrent parfaitement dans le cadre de ses propriétés spécifiques. D'autres perspectives de domaines d'application semblent s'ouvrir pour le traitement d'informations en représentation stochastique, d'une façon générale là où le problème à résoudre est à caractère multidimensionnel, où les impératifs de précision et de vitesse ne sont pas cruciaux. La représentation stochastique conduit ici à une solution plus économique qu'une solution numérique.

A l'heure actuelle, la représentation stochastique n'a pas encore donné lieu à des réalisations d'ensembles de calcul opérationnels. Bien qu'elle ait été proposée par VON NEUMANN, il y a plus de vingt ans, les premières publications (A1 à A7) envisageant une réalisation datent de 1967. Encore conservent-elles un caractère théorique. Aucune publication de cette époque n'aborde en effet le problème du codage de l'information sous l'angle des réalisations possibles. Par contre, elles envisagent toutes des domaines d'application dans le cadre de problèmes multidimensionnels complexes, et s'accordent à voir dans le développement actuel de la microélectronique le moyen d'utiliser une idée ancienne, abandonnée parce qu'irréalisable à l'origine. Les premières publications envisageant le codage d'informations à l'aide de séquences pseudo-aléatoires (A7 , A8) ont montré que le système est réalisable.Toutefois, elles n'abordent que les problèmes de codage et de décodage de l'information et non le traitement, laissant à résoudre en particulier les problèmes d'indépendance stochastique des séquences pseudo-aléatoires. Ces recherches ont néanmoins tracé un cadre à la présente étude, en montrant certaines possibilités de réalisation et en fixant les limitations de principe du procédé.

Dans un premier chapitre, nous aborderons les principes de la représentation stochastique, ainsi qu'un certain nombre de modes de représentation basés sur ces principes. Cette étude préalable conduira aux options qui ont dû être prises et qu'on essaiera de justifier dans le second chapitre. Le troisième chapitre traitera de la génération de bruit et des problèmes d'indépendance de séquences stochastiques. Ce point qui conditionne toute réalisation pratique, n'a pas encore fait l'objet de publications. Nous donnerons dans un quatrième chapitre quelques idées générales sur l'application des résultats théoriques à la conception de structures de calcul utilisant la représentation stochastique. Enfin, nous traiterons d'une application particulière qui concerne l'étude et la réalisation d'un module de traitement spécialisé. La réalisation de cette maquette et l'étude des performances obtenues, permettront de mieux préciser les perspectives d'utilisation de la représentation stochastique en matière de traitement d'information.

La Representation Stochastique de l'Information

Dans ce chapitre, nous allons aborder les principales propriétés de la représentation stochastique de l'information, sans nous préoccuper de la réalisation physique des hypothèses de base.

Nous examinerons au préalable le principe de la représentation. Noux exposerons ensuite diverses variantes basées sur ce même principe et permettant le codage de grandeurs algébriques, qui ont été proposées dans diverses publications (A1 à A8). Enfin, nous donnerons les principes du codage et du décodage.

1.1. Définition et Principe

L'idée de base de la représentation stochastique de l'information est d'associer à une variable x une suite de réalisations (ou séquence) d'une variable aléatoire X binaire (valeurs 0 ou 1). La probabilité d'avoir X = 1 dans cette séquence représente la variable codée x.

Cette définition détermine le codage d'une information, mais non son décodage, une probabilité n'étant pas une grandeur mesurable. La séquence X étant stationnaire, et sous une hypothèse de stationnarité sur laquelle nous reviendrons, nous avons :

$$E(X) = 1.\ Pr\ (X=1) + 0.\ Pr\ (X=0) = Pr\ (X=1) \qquad (1-1)$$

avec les notations :

E(A) — espérance mathématique de la variable aléatoire A (ou valeur moyenne)

Pr (A=B) — probabilité d'avoir la réalisation B pour la variable aléatoire A.

Le décodage va donc s'effectuer à l'aide d'une estimation de la valeur moyenne de X. La mesure d'une valeur moyenne doit être faite sur un temps infini ; dans tous les cas pratiques (temps fini), c'est bien à une estimation que nous aurons affaire et non à une mesure.

L'estimation de la valeur moyenne peut être faite :

- par comptage sur un nombre fini d'échantillons
- par moyennage avec pondération exponentielle (c'est-à-dire filtrage passe-bas).

Pour que cette estimation ait un sens, il faut qu'elle remplisse deux conditions :

1/. La probabilité d'avoir X = 1 ne doit pas varier rapidement devant le temps d'estimation de la valeur moyenne, afin de satisfaire à l'hypothèse de stationnarité au moins sur le temps d'estimation.

2/. L'estimation de la valeur moyenne est une variable aléatoire, dont la valeur moyenne est bien celle, cherchée, de la séquence si le processus est stationnaire. Elle est par conséquent entachée de fluctuations statistiques, fluctuations dont l'écart-type est en général une fonction décroissante du temps d'estimation. Or, cet écart-type est directement représentatif de la précision du décodage : à une précision donnée correspondra donc un temps d'estimation minimal donné. Compte tenu de la première condition, le spectre des variations admissibles de probabilité est limité. Nous voyons ici, apparaître un compromis précision-vitesse ; l'étude des diverses solutions pour améliorer ce compromis est un des points les plus importants en vue d'applications pratiques.

Les séquences aléatoires peuvent être synchrones ou asynchrones. Le premier cas présente l'avantage de simplifier grandement les réalisations technologiques, sans nuire pratiquement aux performances de la représentation : nous nous limiterons donc, dès à présent, au cas des séquences synchrones, c'est-à-dire dont les commutations n'ont lieu qu'à des instants discrets donnés par une horloge.

Les opérateurs en représentation stochastique se rangent dans deux classes distinctes :

- les opérateurs sans mémoire (multiplieur, additionneur...)
- les opérateurs avec mémoire (intégration par rapport au temps).

Les opérateurs sans mémoire sont de simples circuits combinatoires : si Z est la séquence résultat d'une opération entre les séquences X et Y, Z (ti) est donné en fonction de X (ti) et Y (ti).

Pour écrire les équations logiques liant X,Y,Z, nous utiliserons les notations :

$A \wedge B$ intersection logique de A et B

$A \vee B$ réunion logique de A et B

$\bar{A}$ complément de A (ou négation de A)

Le principe du multiplieur repose sur le fait que si X (ti) et Y (ti) sont stochastiquement indépendants, alors :

$$Z\ (ti) = X\ (ti) \wedge Y\ (ti) \qquad (1\text{-}2)$$

représente le produit des informations codées par X et Y. En effet, dans ce cas :

$$Pr\ (Z=1) = Pr\ (X=1)\ .\ Pr\ (Y=1) \qquad (1\text{-}3)$$

Quant à l'additionneur, il nécessite une variable supplémentaire. En effet, si on faisait $Z = X \vee Y$, la probabilité de Z ne serait pas la somme des probabilités de X et Y, X et Y n'étant pas nécessairement exclusifs.

On rend les variables X et Y exclusives à l'aide d'une troisième variable K, de probabilité 1/2 et on fait :

$$Z\ (ti) = k\ (ti) \wedge X\ (ti) \ \vee\ \bar{k}\ (ti) \wedge Y\ (ti) \qquad (1\text{-}4)$$

Si k est stochastiquement indépendant de X et Y, on a :

$$Pr \quad (Z=1) = \frac{1}{2} \left| Pr\ (X=1) + Pr\ (Y=1) \right| \qquad (1\text{-}5)$$

L'intégrateur par rapport au temps est, lui, un opérateur avec mémoire : il doit emmagasiner toutes les informations successives. Nous verrons qu'il est constitué d'un registre compteur-décompteur, dont l'état, codé par exemple en représentation binaire, constitue directement l'information de sortie. Cette information de numérique doit être recodée si on désire l'utiliser comme entrée d'autres opérateurs.

Nous verrons que ce point est extrêmement important : si sa structure est plus complexe que celle d'un opérateur sans mémoire, l'intégrateur par rapport au temps constitue un étage de sortie vers le numérique sans dispositif additionnel. Nous verrons également qu'il permet le "découpage" d'un problème sur le plan de l'indépendance des séquences.

1.2. Différents modes de représentation des grandeurs algébriques

Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1. Il existe donc un problème de cadrage de l'information pour représenter des nombres négatifs. Nous allons examiner un certain nombre de solutions qui ont été proposées (A1, A4, A5) pour résoudre ce problème.

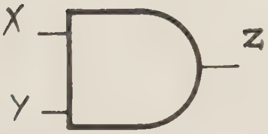
1.2.1. Représentation monofilaire symétrique

Pour réaliser une représentation monofilaire symétrique, on transforme l'intervalle { 0,1 } de variation de probabilité en l'intervalle {-1, 1} de variation des grandeurs codées par l'application linéaire :

$$Pr\ (X=1) = \frac{1}{2}\ (1+x) \qquad (1\text{-}6)$$

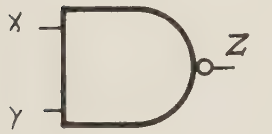
ou $\quad x = 2\ Pr\ (X=1) - 1 \qquad (1\text{-}7)$

(voir fig. 1.1.)



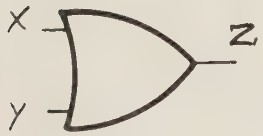
fonction ET

$Z = X \wedge Y$



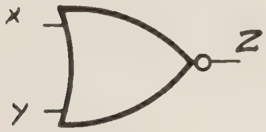
fonction NON ET (NAND)

$Z = \overline{X \wedge Y} = \bar{X} \vee \bar{Y}$



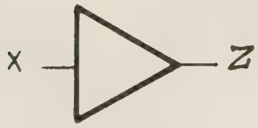
fonction OU

$Z = X \vee Y$



fonction NON OU (NOR)

$Z = \overline{X \vee Y} = \bar{X} \wedge \bar{Y}$



fonction NON

$Z = \bar{X}$

Representation des circuits logiques

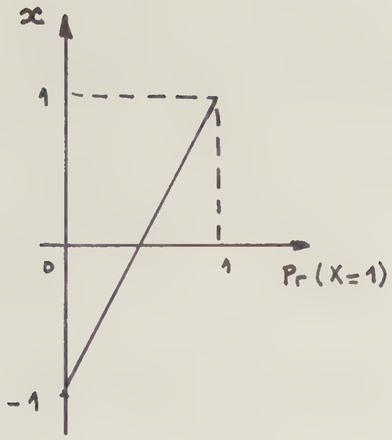


fig 1.1

Representation monofilaire symetrique

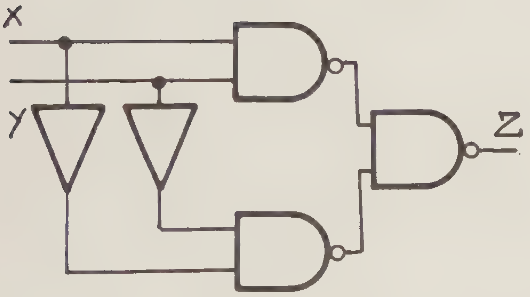


fig 1.2

Multiplieur en representation monofilaire symetrique

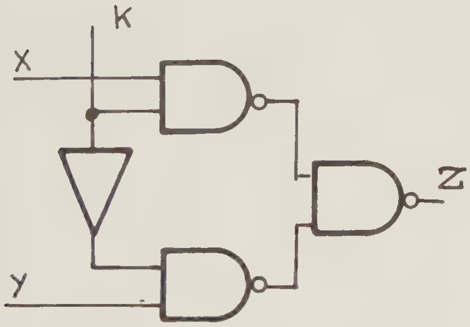


fig 1.3

Additionneur en representation monofilaire symetrique

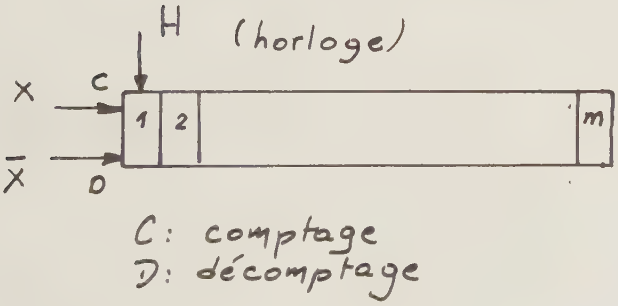
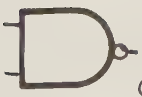


fig 1.4

Integrateur en representation monofilaire symetrique


fonction NAND (NON-ET)

complementation

L'extension de l'intervalle {-1, 1} peut se faire ensuite par une simple homothétie à un intervalle symétrique quelconque {-V, +V}

Nous allons voir les structures de trois opérateurs fondamentaux dans ce type de représentation :

-Multiplieur (fig. 1.2)

La relation (1-3) devient :

$$Z\ (ti) = X\ (ti) \wedge Y\ (ti) \quad \vee \quad \bar{X}\ (ti) \wedge \bar{Y}\ (ti) \qquad (1\text{-}8)$$

En effet, si X et Y sont stochastiquement indépendants :

$$Pr\ (Z=1) = Pr\ (X=1)\ .\ Pr\ (Y=1) + Pr\ (X=0)\ .\ Pr\ (Y=0)$$

$$= Pr\ (X=1)\ .\ Pr\ (Y=1) + (1-Pr\ (X=0))\ (1 - Pr\ (Y=0))$$

D'après (1-6) :

$$Pr\ (X=1) = \frac{1}{2}\ (1+x)$$

$$Pr\ (Y=1) = \frac{1}{2}\ (1+y)$$

d'où :

$$Pr\ (Z=1) = \frac{1}{2}\ (1+xy)$$

en appliquant (1-7), on trouve bien

$$z = xy$$

-Additionneur (fig. 1.3)

La structure de l'additionneur est celle donnée dans le § 2.1. :

$$Z\ (ti) = k\ (ti) \wedge X\ (ti) \quad \vee \quad \bar{k}\ (ti) \wedge Y\ (ti) \qquad (1\text{-}4)$$

où : $Pr\ (k=1) = 1/2$

k indépendant de X et Y

On trouve alors, avec (1-6) et (1-7)

$$Pr\ (Z=1) = \frac{1}{2}\ (1 + \frac{x+y}{2})$$

ET $$z = \frac{x+y}{2}$$

Le changement de signe est obtenu par simple complémentation de la séquence :

$$Z\ (ti) = \overline{X}\ (ti)$$

donne $Pr\ (Z=1) = 1 - Pr\ (X=1) = \frac{1}{2}\ (1-x)$

d'où $z = -x$

-<u>Intégrateur par rapport au temps</u> (fig. 1.4)

L'intégrateur par rapport au temps est constitué d'un registre compteur-décompteur, dont l'entrée comptage est la séquence X, l'entrée décomptage la séquence $\overline{X}$.

Un registre compteur-décompteur est, d'une façon générale, un automate synchrone à M états différents, $e_1, e_2, \ldots, e_M$. Les changements d'état ont lieu uniquement lorsqu'apparait un signal de l'horloge H de la façon suivante :

$e_i \rightarrow e_{i+1}$ lorsqu'on a un ordre de comptage

$e_i \rightarrow e_{i-1}$ lorsqu'on a un ordre de décomptage.

Afin d'adopter une structure unique, nous utiliserons toujours un codage binaire à poids négatifs en complément à 2 (compléments vrais) des états du compteur. La démarche que nous allons suivre est aisément transposable à tout autre codage. L'utilisation des poids négatifs permet d'avoir une information de sortie dans l'intervalle {-1,1}.

Soit m le nombre d'étages du compteur, le nombre d'états M vaut 2^m. Appelons x_o, x_1,...., x_{m-1}, les contenus booléens (0 ou 1) des m étages : la sortie S est donnée par (code des compléments à 2) :

$$S = -x_o + \sum_{i=1}^{m-1} x_i \cdot 2^{-i}$$

(x_o est le "bit de signe").

Ainsi à l'état

	x_o	x_1		x_{m-1}		
Ainsi à l'état	o	1 1	——	1	correspond	$S = 1-2^{-(m-1)}$
	o	o o	——	1		$S = 2^{-(m-1)}$
	o	ooo	——	o		$S = o$
	1	1 1	——	1		$S = -2^{-(m-1)}$
	1	o o	——	1		$S = -1+2^{-(m-1)}$
	1	o o	——	o		$S = -1$

La valeur S=1 n'est jamais atteinte.

Nous appelerons $S(t_k)$, le contenu de l'intégrateur au temps t_k de l'horloge et f_H la fréquence de cette horloge.

Un ordre de comptage au temps t_k provoque un incrément Δ_k de $S(t_k)$ égal au poids le plus faible, soit $2^{-(m-1)}$; un ordre de décomptage provoque un incrément de $-2^{-(m-1)}$.

L'entrée comptage étant $X(t_k)$ et l'entrée décomptage $\overline{X}(t_k)$, l'espérance mathématique de l'incrément est :

$$E(\Delta_k) = 2^{-(m-1)} \quad Pr(X=1) - Pr(X=o)$$

d'après (1-6) :

$$E(\Delta_k) = 2^{-(m-1)} \quad x(t_k)$$

d'autre part, $S(t_k) = \sum_{i=o}^{k} \Delta_k + So$

(So : valeur initiale de l'intégrateur).

On en déduit :

$$E(S(t_k)) = 2^{-(m-1)} \sum_{i=o}^{k} x(t_k) + So$$

$S(t_k)$ est donc une variable aléatoire dont la valeur moyenne est l'approximation du premier ordre de l'intégrale:

$$\frac{1}{tj - tj-1} \int_o^{tk} x(t_k)\, dt + So \qquad \text{(si elle existe)}$$

Or $f_H = \dfrac{1}{tj-tj-1}$

On en déduit :

$$E\, |S(t_k)| \approx 2^{-(m-1)} f_H \int_o^{t_k} x(t)\, dt + So \qquad (1-9)$$

La convergence de $S(t_k)$ vers l'intégrale de x dépend de deux conditions, l'une correspond au problème classique de l'intégrateur échantillonné et dépend, bien entendu, du rapport entre la fréquence d'échantillonnage de x et la plus grande fréquence du spectre de x. L'autre condition est un problème de convergence en probabilité, qui n'est pas résolu dans tous les cas. On peut formuler cette dernière condition d'une manière difféfente : $S(t_k)$ est une variable aléatoire, dont la variance est fonction de la séquence X et de t_k. Cette variance peut devenir infinie dans le cas ou X est une séquence de Bernouilli. Nous reviendrons plus loin sur ce point.

En assimilant $E\,[S(t_k)]$ à l'expression classique $\frac{1}{T}\int_o^t x(t)\,dt$

La constante de temps équivalente de l'intégrateur est :

$$T = \frac{2^{m-1}}{H} \qquad (1\text{-}10)$$

Nous voyons que les opérateurs fondamentaux sont constitués exclusivement de circuits logiques de faible complexité, semblant donc s'adapter parfaitement aux techniques d'intégration.

1.2.2. Représentation bifilaire symétrique

En représentation bifilaire symétrique, l'information stochastique est constituée de deux informations binaires aléatoires. L'information x est représentée par les deux séquences binaires aléatoires Xp et X_n, telles que :

$$- \; Xp\,(ti) \wedge X_n\,(ti) = o \qquad \forall\,(ti) \qquad (1\text{-}11)$$

C'est-à-dire que Xp et X_n ne sont jamais simultanément égaux à 1.

$$- \; x = Pr\,(Xp = 1) - Pr\,(Xn = 1) \qquad (1\text{-}12)$$

Cette dernière relation montre que x peut effectivement varier entre -1 et 1.

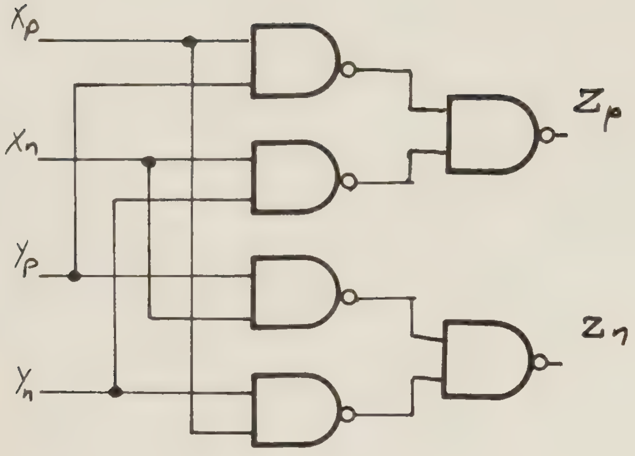


fig 1.5

Multiplieur en
representation bifilaire
symetrique

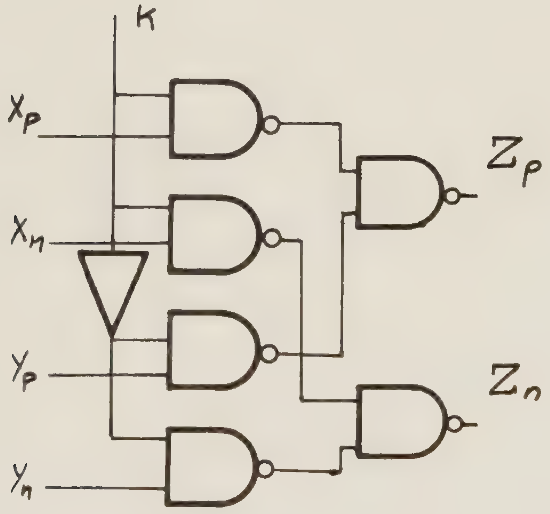


fig 1.6

Additionneur en
representation bifilaire
symetrique

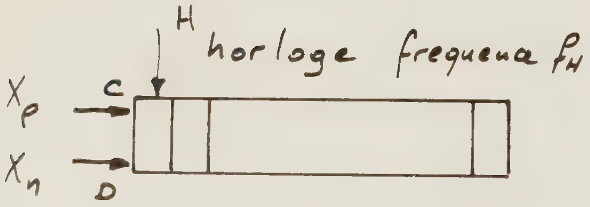


fig 1.7

Integrateur en
representation bifilaire
symetrique

En fait, cette représentation à deux signaux binaires non simultanés est strictement équivalente à une représentation à un signal ternaire. Nous conserverons toutefois l'aspect deux signaux binaires, plus proche de la réalisation technologique.

Les schémas des opérateurs sont alors modifiés par rapport aux schémas précédents.

Pour les opérateurs sans mémoire :

-Multiplieur (fig. 1.5)

$$Zp = Xp \wedge Yp \vee Xn \wedge Yn$$
$$Zn = Xp \wedge Yn \vee Xn \wedge Yp \qquad (1-13)$$

Compte tenu de (1-11) et (1-12) et si les couples {Xn, Yn} ,{Xn,Yp}, {Xp, Yn}, {Xp, Yp} sont stochastiquement indépendants :

$$z = Pr\ (Zp=1) - Pr\ (Zn=1) = xy$$

-Additionneur (fig. 1.6.)

$$Zp = K \wedge Xp \vee \overline{K} \wedge Yp$$
$$Zn = K \wedge Xn \vee \overline{K} \wedge Yn \qquad (1-14)$$

avec $Pr\ (k=1) = \frac{1}{2}$

si les couples {K, Kp} ,{K, Xn} ,{K, Yp}, {K, Yn} sont stochastiquement indépendants :

$$z = \frac{x + y}{2}$$

Le changement de signe est obtenu par une simple permutation des fils Xp et Xn.

-Intégrateur par rapport au temps (fig. 1.7)

L'intégrateur par rapport au temps est toujours un registre compteur-décompteur, mais dont l'entrée comptage est la séquence Xp, l'entrée décomptage la séquence Xn.

La démonstration est identique à la précédente. L'incrément du compteur à l'instant t_k est :

$2^{-(m-1)}$ si Xp = 1

$- 2^{-(m-1)}$ si Xn = 1

o si Xp V Xn = o

d'où $E\ (\Delta k) = 2^{-(m-1)} \times (t_k)$ comme précédemment (la combinaison $Xp \wedge Xn = 1$ est interdite).

La constante de temps de l'intégrateur est encore :

$$T = \frac{2^{(m-1)}}{f_H}$$

Par rapport à la représentation monofilaire, cette représentation n'introduit pas un grand accroissement de complexité au niveau de la structure des opérateurs, toutefois, le nombre d'interconnections est multiplié par deux. La représentation bifilaire a l'avantage d'augmenter le champ de variation de la variable probabilité et surtout de permettre la représentation de la valeur o par Xp = Xn = o, ce qui n'introduit aucune fluctuation au décodage.

1.2.3. Représentation bifilaire non symétrique

On représente ici la variable x par deux informations booléennes, l'une aléatoire Xa, qui représente la valeur absolue de x, l'autre déterministe ou aléatoire Xs, qui représente le signe à donner à Xa :

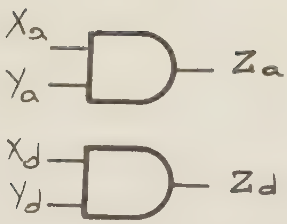


fig 1.8

Multiplieur en representation bifilaire non symetrique

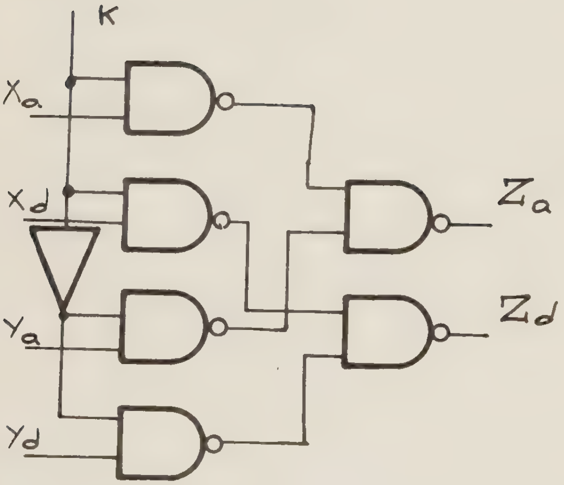


fig 1.9

Additionneur en representation bifilaire non symetrique

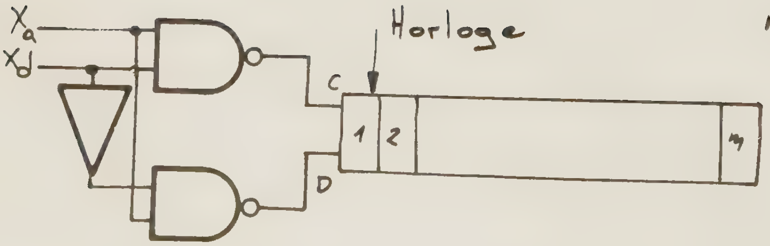


fig 1.10

Integrateur en representation bifilaire non symetrique

$$Pr\ (Xa=1) = x \tag{1-15}$$

$$Pr\ (Xa \wedge Xd) - Pr\ (Xa \wedge \overline{Xd}) = x \tag{1-16}$$

Une solution est de prendre au codage

$Xd = 1$ si $x > o$

$Xd = o$ si $x < o$

-Multiplieur (fig. 1.8)

$Za = Xa \wedge Ya$

$Zd = Xd \wedge Yd$

Il est nécessaire que Xa et Ya soient indépendants, mais non Xd et Yd.

-Additionneur (fig. 1.9)

$Za = K \wedge Xa \vee \overline{K} \wedge Ya$

$Zd = K \wedge Xd \vee \overline{K} \wedge Yd$

Le changement de signe est obtenu en complémentant Xd. L'intégrateur (fig 1.10) est toujours un registre compteur-décompteur, dont l'entrée comptage est $Xa \wedge Xd$; l'entrée décomptage est $Xa \wedge \overline{Xd}$.

La représentation bifilaire non symétrique, est sensiblement équivalente à la précédente, tant sur le plan de la complexité des opérateurs que sur le plan des fluctuations.

1.2.4. Autres représentations

Diverses variantes (A4,A5) ont été proposées, dans le but de s'affranchir des bornes de variation {-1, 1} qui obligent à travailler en variables normées :

-Représentation bifilaire $X1$, X_2 :

$$x = \frac{Pr\ (X_1=1)}{Pr\ (X_2=1)}$$ (ne code pas le signe)

-Représentation trifilaire X1, X2, X3 :

$$x = \frac{Pr\ (X_1=1) - Pr\ (X_2=1)}{Pr\ (X_3=1)}$$

-Représentation quadrifilaire X1,X2,X3,X4 :

$$x = \frac{Pr\ (X_1=1) - Pr\ (X_2=1)}{Pr\ (X_3=1) - Pr\ (X_4=1)}$$

Ces deux dernières représentations permettent bien d'obtenir un champ de variation de $- \infty$ à $+ \infty$.
Elles permettent d'obtenir des multiplieurs relativement simples, ainsi que des diviseurs (que nous n'avions pas trouvé sous forme simple dans les autres types de représentation) ; par contre, les structures d'additionneurs et surtout d'intégrateurs deviennent très complexes. Le codage dans ces divers types de représentation paraît également difficile à obtenir.

-Représentation en virgule flottante

FERRATE (A5) a proposé une autre extension de la représentation bifilaire symétrique : aux deux variables Xp et Xn de la représentation bifilaire symétrique, on ajoute une troisième variable Xe, déterministe et entière, qui effectue une pondération de Xp et Xn :

$$x = b^{Xe} \left| Pr\ (Xp=1) - Pr\ (Xn=1) \right|$$

b étant la base utilisée.

L'additionneur n'est que peu modifié ; par contre, le multiplieur devient plus complexe (il faut effectuer l'addition numérique des exposants Xe et Ye) de même que l'intégrateur, qui doit cette fois compter ou décompter des échantillons pondérés.

Ces diverses variantes ne semblent pas présenter un grand intérêt pour une réalisation pratique : l'extension du champ de variation est obtenue au prix d'une plus grande complexité des structures de calcul. L'intérêt de la représentation stochastique étant la grande simplicité des opérateurs, il nous semble peu souhaitable de diminuer celle-ci. Le gain obtenu par ces diverses méthodes ne concerne d'ailleurs que la précision "statique" (entrées constantes ou très lentement variables) de la représentation, et non la rapidité. Nous verrons dans leschapitres suivants que ce dernier point est de loin le plus important.

1.3. Principes du codage et du décodage

Pour les raisons que nous venons de présenter, nous nous sommes limités à l'examen des trois premiers types de représentation (monofilaire symétrique, bifilaire symétrique et non symétrique).

Nous allons voir que les méthodes de codage et de décodage dans ces trois cas sont similaires et se déduisent toutes du problème élémentaire du codage et du décodage d'une information comprise entre o et 1.

1.3.1. Codage

soit $x \in \{0,1\}$

La méthode retenue pour effectuer le codage de x est d'utiliser un générateur de bruit aléatoire B et un processus de comparaison :

x est codé par la séquence aléatoire X, définie par la fonction non linéaire du bruit B :

$$\begin{aligned} X &= 1 \quad \text{si} \quad x > B \\ X &= o \quad \text{sinon} \end{aligned} \qquad (1\text{-}17)$$

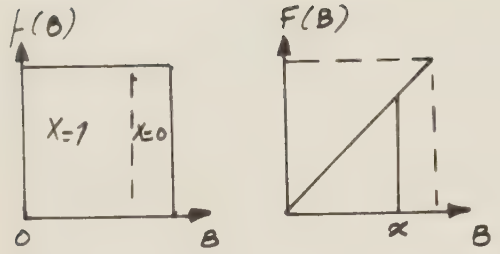


fig 1.11

Densité de probabilité et Fonction de répartition du bruit B.

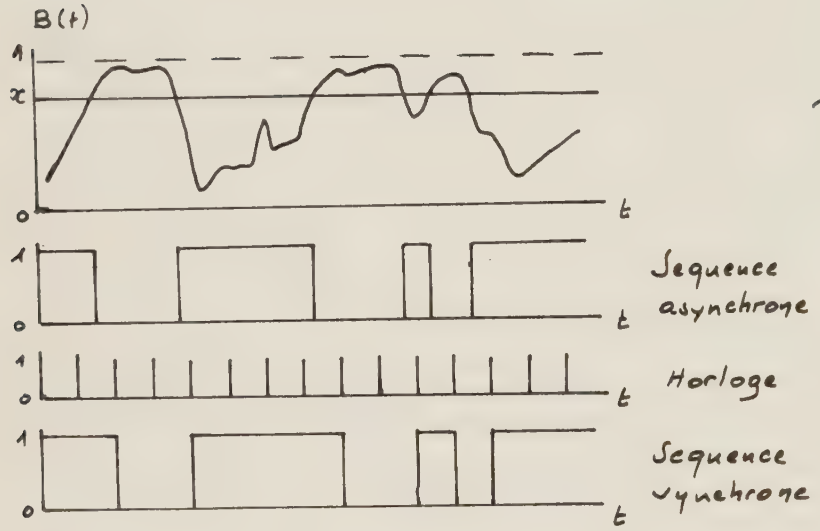


fig 1.12

Principe du codage

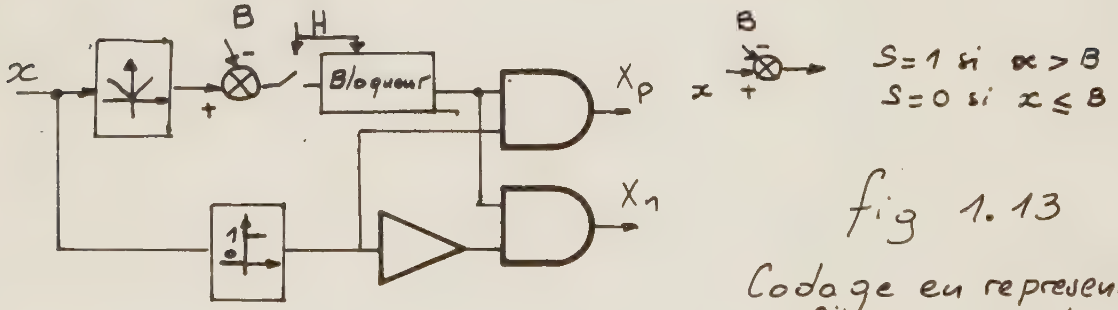


fig 1.13

Codage en representation bifilaire symetrique

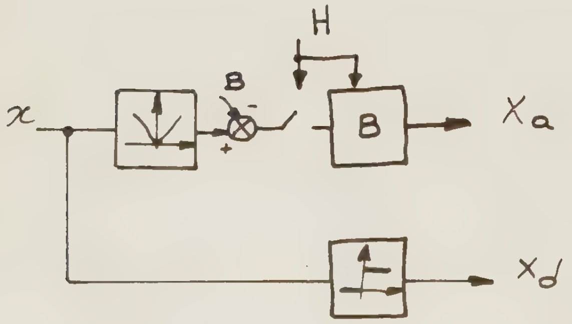


fig 1.14

Codage en representation bifilaire non symétrique

Alors :

$$Pr\ (X=1) = Pr\ (B < x) = F_B\ (x)$$

où F_B est la fonction de répartition de B.

Pour obtenir le codage linéaire

$$x = Pr(X=1)$$

nous voyons que F_B (u) doit être une droite de pente 1 sur { 0,1}, ce qui correspond à un bruit de distribution uniforme sur { 0,1} (voir fig 1.11)

Il faut donc pouvoir disposer d'un générateur de bruit à densité uniforme sur {0,1 }. Cette condition permet de garder la structure simple de comparaison pour effectuer le codage.

Enfin, pour réaliser des séquences aléatoires synchrones, il suffit d'échantillonner la séquence aléatoire obtenue (fig 1.12). Il faut vérifier bien entendu que cet échantillonnage dans le temps ne modifie pas les propriétés de distribution en amplitude du bruit B.

La transposition de ce codage en représentation monofilaire symétrique s'obtient, d'après (1-6) :

-soit en codant $x' = \frac{1}{2}(1+x)$ par le codeur précédent.

-soit en utilisant un bruit uniforme sur {-1,1}, dont la fonction de répartition est alors $\frac{1}{2}$ (1+x).

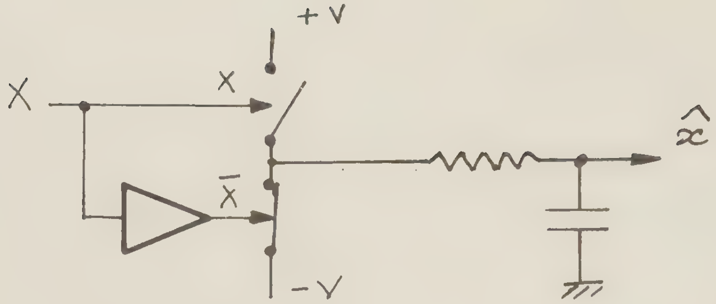
Les codages en représentation bifilaire symétrique ou non symétrique ne sont pas entièrement déterminés par les relations (1-11), (1-12) d'une part, (1-15), (1-16) d'autre part. On peut voir qu'une solution possible est de faire :

X = codage de $|x|$ (valeur absolue) de la même façon que précédemment (1-17)

et d'en déduire :

-<u>En représentation bifilaire symétrique</u>

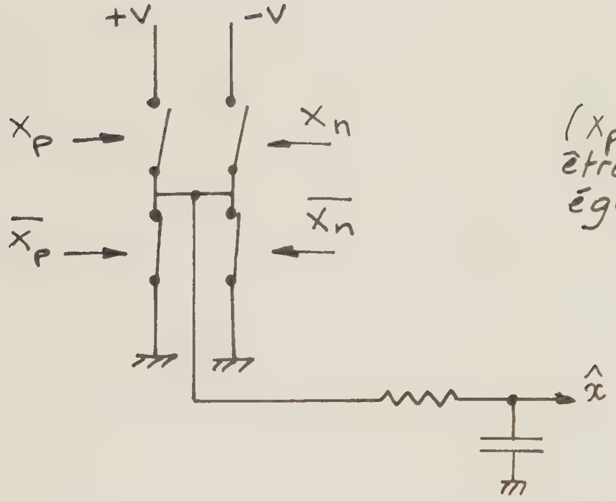
fig 1.15



Décodage à partir d'une representation monofilaire symetrique

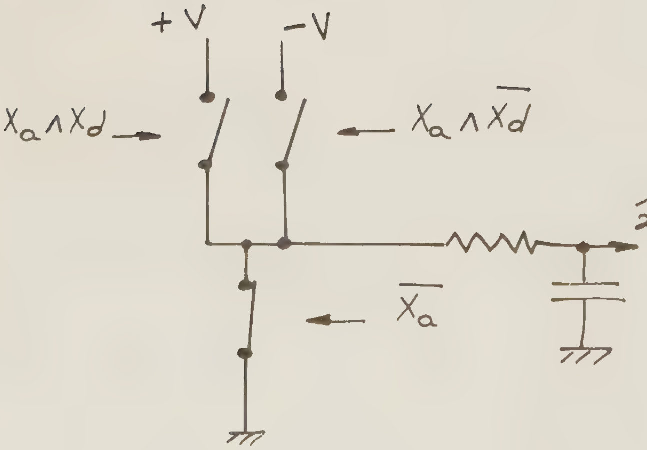
+V, -V : tensions de référence

$-V \leq \hat{x} \leq V$



(X_p et X_n ne peuvent être simultanément égaux à 1)

Décodage à partir d'une représentation bifilaire symétrique



Décodage à partir d'une représentation bifilaire non symetrique

$$Xp = X \wedge \text{signe}(x)$$

$$Xn = X \wedge \text{signe}(x)$$

avec signe (x) = o x < o

signe (x) = 1 x $\geq$ o

-En représentation non symétrique

$$Xa = X$$

$$Xd = \text{signe}(x)$$

On trouvera les schémas de principe de ces deux codages fig 1.13 et 1.14.

1.3.2. Décodage

Le décodage est effectué par une estimation de valeur moyenne (1-1) d'un signal à deux niveaux o et 1. Deux méthodes sont possibles :

-comptage des niveaux 1
-filtrage passe-bas

La première méthode n'est utilisable que pour le décodage vers une information numérique.

La seconde est utilisable vers une information numérique ou analogique, suivant que le filtrage est numérique (intégrateur bouclé, le bouclage pouvant être réalisé par des opérateurs stochastiques) ou analogique (intégrateur analogique bouclé, cellule R-C). Les schémas de principe dans les trois types de représentation envisagés sont donnés fig 1.15, pour le cas d'un filtrage analogique par filtre passif.

Dans les deux cas, l'écart-type de l'estimateur sera fonction de la distribution de la séquence et des paramètres temporels du décodeur lui-même (nombre d'échantillons comptés, constante de temps du filtre, etc...)

Les divers points évoqués dans ce chapitre définissent un cadre de travail pour l'étude des structures de calcul en représentation stochastique. Avant d'aller plus loin, nous allons préciser un certain nombre de choix qui ont été faits au départ de l'étude, sur le plan du mode de représentation et de la génération des séquences

Choix d'une Représentation
Conceptions Aléatoires et Pseudo-Aléatoires

Un premier choix est à faire entre les divers types de représentation de grandeurs algébriques (Cf § 1.2). Nous avons éliminé à priori les représentations qui conduiraient à des structures d'opérateurs trop complexes. Il reste alors trois types de représentation : unifilaire symétrique et bifilaire symétrique ou non symétrique, ces deux dernières étant sensiblement équivalentes.

Entre la représentation unifilaire et la représentation bifilaire, la différence fondamentale réside dans le problème des fluctuations autour de la valeur zéro. Dans certains problèmes (par exemple en commande automatique), on peut tolérer un niveau de fluctuations plus grand autour d'une valeur non nulle qu'autour du zéro, qui doit rester un état "sans évolution". Il y a lieu, dans ce cas, de préférer la représentation bifilaire. Par contre, si ce problème des fluctuations autour du zéro ne présente pas une importance particulière, il peut être préférable d'utiliser une représentation unifilaire, qui conduit à des réalisations un peu plus simples.

Le second choix à faire porte sur le mode de génération des séquences aléatoires. Les procédés de génération utilisent des générateurs de bruit à densité en amplitude uniforme sur un intervalle fini. Ces générateurs doivent être choisis de manière à ce que les séquences obtenues à l'aide du processus de comparaison avec l'information à coder (voir § 1.3.1.) soient stochastiquement indépendantes.

Il y a deux conceptions possibles : générateurs de bruit strictement aléatoires, basés sur un processus physique aléatoire ou générateurs pseudo-aléatoires. D'une manière générale, un générateur pseudo-aléatoire est un automate fini qui délivre une suite de nombres représentatifs de ses états internes. Cette suite est nécessairement périodique, la période étant égale au nombre d'états différents de l'automate.

Dans le cas des générateurs physiques, il semble assez difficile d'obtenir plusieurs sources de bruit indépendantes localisées dans un même calculateur, à cause des perturbations extérieures qui influencent toutes les sources de bruit simultanément. On peut, sous certaines conditions (par exemple bruit blanc Gaussien) réaliser plusieurs sources indépendantes par décalage dans le temps d'un même bruit. Cette méthode est peu aisée à mettre en oeuvre avec un bruit analogique et n'est valable que si les propriétés spectrales du bruit sont rigoureusement invariantes dans le temps.

Dans le cas de générateurs pseudo-aléatoires, on utilisera uniquement la seconde solution, l'étude des corrélations entre générateurs de structure différente étant extrêmement difficile etnn'ayant pas jusqu'à présent conduit à des résultats intéressants.

Réaliser avec des générateurs physiques un bruit à densité de probabilité en amplitude constante est assez difficile, en effet, les générateurs physiques ont une densité généralement gaussienne. D'autre part, la précision au niveau du codage est directement fonction de la précision et de la stabilité de la distribution.

Un autre argument en faveur des générateurs pseudo-aléatoires est donné par l'examen de l'écart-type de l'estimation de la valeur moyenne : la périodicité des générateurs pseudo-aléatoires permet, en effet, d'améliorer considérablement la précision du décodage.

Afin de préciser cette notion, examinons le cas du décodage par comptage sur N échantillons, et plaçons nous dans le cas stationnaire $Pr\ (X = 1) = x$. Soit à estimer l'espérance mathématique de la variable binaire aléatoire X sur N échantillons.
L'estimation s'écrit :

$$S(i) = \frac{1}{N} \sum_{k=i-N}^{i} X_k$$

S(i) est une variable aléatoire dont la valeur moyenne est $Pr\ (X = 1)$ et dont l'écart-type dépend de la distribution de X.

Supposons que X soit une séquence de Bernoulli, c'est-à-dire que la réalisation de ne dépende pas des réalisations antérieures
S(i) suit alors une loi binomiale et son écart-type est donné par

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N}} \qquad (2\text{-}1)$$

avec p = Pr(X = 1) = E(X)

Ce cas est celui qui correspond à un générateur de bruit aléatoire qui est un processus Markovien d'ordre 0 (bruit blanc échantillonné).

On sait que, si N est grand, la loi binomiale tend vers une loi de Gauss, ce qui permet de relier l'erreur commise à l'écart-type par :

Probabilité que l'erreur soit inférieure			à σ	68 %
"	"	"	à 2σ	95,4 %
"	"	"	à 3σ	99,74 %

Ces valeurs ne sont bien entendu, qu'une approximation valable seulement si N est grand. En particulier, la loi de Gauss a une répartition illimitée, alors que l'erreur d'estimation est nécessairement donnée en valeur absolue par Sup (p, 1-p).

Considérons maintenant le cas où X est une séquence pseudo-aléatoire, périodique de période L ; on a alors :

$$\frac{1}{L} \sum_{l=j}^{j+L} X_l = p$$

C'est-à-dire que l'estimation de la probabilité est exacte pour L échantillons consécutifs. On peut avoir un modèle de ce genre de répartition en l'assimilant à un tirage aléatoire dans une urne finie de dimension L.
On sait que, dans ce cas, l'estimateur S suit une loi hypergéométrique et son écart-type est donné par :

$$\sigma_s = \sqrt{\frac{p(1-p)}{N} \quad \frac{L-N}{L-1}} \qquad \text{pour tout } N < L$$

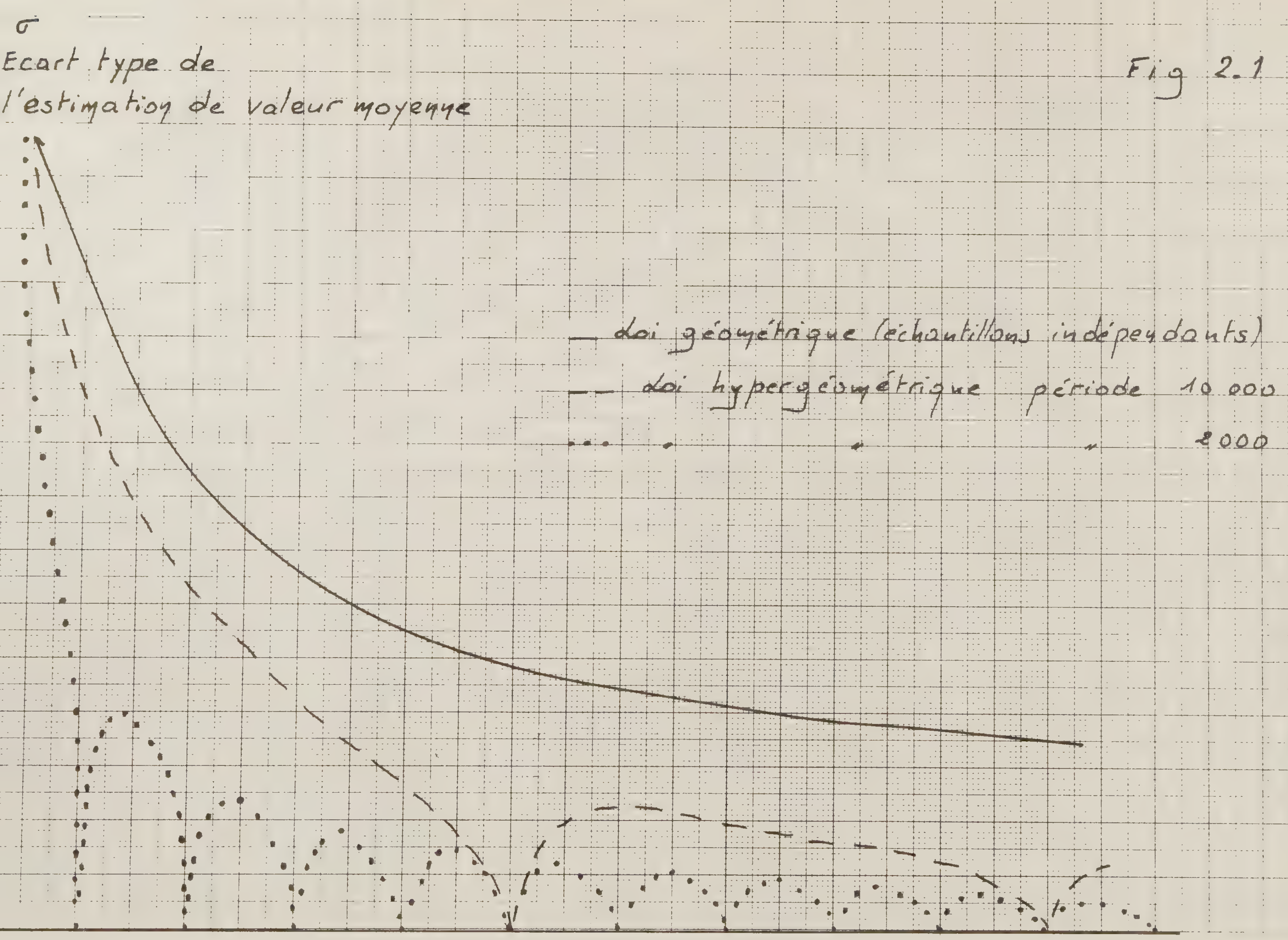

σ
Ecart type de
l'estimation de valeur moyenne
— Loi géométrique (échantillons indépendants)
-- Loi hypergéométrique période 10 000
... " " " 2000

Fig 2.1

σ_s s'annule bien pour N = L (nombre d'échantillons égal à la période).

Pour N plus grand que L, on prolonge le tirage dans une urne finie par périodicité et on observe que S est la somme d'une qualité constante, qui est l'estimation sur un nombre entier de périodes complètes, et d'une valeur aléatoire, qui correspond à l'estimation sur la dernière période incomplète.

On trouve alors :

$$\sigma_s = \frac{1}{N} \sqrt{p(1-p)} \sqrt{n \frac{(L-n)}{L-1}} \qquad (2-2)$$

avec $n \equiv N$ (modulo L)

Valeur qui est toujours inférieure à celle correspondant aux séquences de Bernoulli, et d'autant plus faible que L est petit. La fig. 2.1 illustre cette propriété.

Nous avons dans tout ce qui précède, supposé la séquence X stationnaire, conformément aux remarques que nous avions formulé au paragraphe 1.1. Il est bien évident que si la valeur moyenne de X (p dans les formules ci-dessus) évolue dans le temps, les calculs précédents ne sont plus valables. On est alors tenté de calculer un écart-type fonction du temps par une intégrale de convolution,mais cette méthode n'est pas valable si le domaine de variation de p est grand. En effet, les expressions de ne sont pas linéaires en p et ne sont linéarisables que sur de très petits intervalles : l'allure pour N donné, de la variation de en fonction de p, et pour les deux lois est :

$$\sigma_s = k(N) \sqrt{p(1-p)} \qquad (2-3)$$

Nous verrons plus loin qu'il est très difficile de chercher à déduire une expression d'un écart-type dynamique (c'est-à-dire en régime variable dans le temps) à partir de l'écart-type statique (régime constant). Les formules ci-dessus ne sont d'ailleurs vérifiées qu'assez grossièrement dans la pratique. On constate toutefois que, dans la mesure où la vitesse de variation de la probabilité est suffisamment faible, le rapport de l'écart-type dans une conception pseudo-aléatoire à celui dans une conception strictement aléatoire se conserve sensiblement.

Compte tenu des avantages de réalisation des générateurs pseudo-aléatoires, et des avantages en matière de précision, nous avons préféré étudier la conception pseudo-aléatoire. Dans le chapitre suivant, nous allons voir plus précisément comment ont été réalisées les deux conditions de distribution et d'indépendance.

ETUDE DU GENERATEUR DE BRUIT

3.1 Introduction

Dans le premier chapitre sont apparues deux conditions nécessaires à remplir par le procédé de génération des séquences aléatoires :

- d'une part, on doit avoir une relation linéaire entre la valeur de la grandeur codée et la probabilité représentant la grandeur.
- d'autre part, l'utilisation d'opérateurs algébriques oblige à disposer de séquences stochastiquement indépendantes.

Soit X la séquence booléenne (0 ou 1) aléatoire codant x. Nous avons vu dans le premier chapitre que la première condition est remplie si le codage utilise un comparateur et un bruit B à densité de probabilité en amplitude uniforme. Il existe un grand nombre de générateurs pseudo-aléatoires arithmétiques possédant cette propriété.

Examinons la seconde condition :

soient X et Y deux séquences codant x et y ; B_1 et B_2 les deux bruits utilisés au cedage. Nous avons vu (1-8) les équations du codage :

$$\begin{cases} X=1 & \text{si} \quad x > B_1 \\ X=0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\begin{cases} X=1 & \text{si} \quad y > B_1 \\ X=0 & \text{sinon} \end{cases}$$

X et Y seront stochastiquement indépendants si :

$$Pr\ (X \wedge Y=1) = Pr(X=1)\ Pr\ (Y=1) \tag{3-1}$$

soit :

$$Pr\ (B_1 < x,\ B_2 < y) = Pr\ (B_1 < x)\ Pr\ (B_2 < y) \qquad (3\text{-}2)$$

Cette relation est une relation d'indépendance au niveau des fonctions de répartition.

Si f_1 est la densité de probabilité de B_1

f_2 " " " de B_2

g est la densité conjointe de B_1 et B_2 (3-2) devient :

$$\int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} g(u,v)\ d\,u\ d\,v = \int_{-\infty}^{x} f_1\ (u)\ d\,u \int_{-\infty}^{x} f_2\ (v)\ d\,v \qquad (3\text{-}3)$$

Cette relation n'implique pas nécessairement l'indépendance stochastique de B_1 et B_2, qui serait donnée par :

$$g(u,v) = f_1\ (u)\ f_2\ (v)$$

Par conséquent, la relation (3-2) pourra être vérifiée même avec B_1 et B_2 non indépendants.

Dans une conception pseudo-aléatoire, B_1 et B_2 seront en fait deux versions décalées dans le temps d'un même bruit :

$$B_2(t) = B_1(t-\tau)$$

D'une part, cette réalisation ne nécessite qu'un générateur de bruit unique pour tous les codages ; d'autre part, il n'a pas été possible de trouver des générateurs pseudo-aléatoires de structure différente et indépendants.

Dans le chapitre 2, nous avons vu l'intérêt de l'emploi de générateurs pseudo-aléatoires en matière de précision. L'avantage obtenu est d'autant plus grand que la période pseudo-aléatoire est courte. Il faudra donc tenir compte de cette propriété et d'essayer de résoudre le problème de l'indépendance avec un générateur à période la plus courte possible.

De nombreuses études ont été faites sur le problème de la génération de nombres aléatoires à répartition uniforme. Cependant, à notre connaissance

aucune étude n'a été faite dans la direction donnée ci-dessus.

L'un des critères les plus souvent retenus pour tester le caractère aléatoire d'un générateur pseudo-aléatoire est l'examen de sa fonction d'autocorrélation :

$$E\left[B(t) \cdot B(t-\tau)\right]$$

Le générateur sera réputé bon si la différence

$$\left| E\left[B(t) \cdot B(t-\tau)\right] - \{ E(B(t)) \}^2 \right|$$

est très faible.

Cette condition est une condition nécessaire mais non suffisante pour assurer l'indépendance stochastique de B(t) et B(t-τ).

Nous avons essayé plusieurs types de générateurs pseudo-aléatoires d'utilisation classique dans les algorithmes de simulation de phénomènes aléatoires (B5 à B8).

Citons par exemple :

-<u>méthodes de congruences</u>

. $B_k \equiv \lambda B_{k-1} + \mu$ (modulo M)

où λ , μ, M sont des entiers choisis de façon à ce que la période soit M.

. $B_k \equiv B_{k-1} + B_{k-2}$ (modulo M)

(séquences de Fibonacci)

-<u>méthode du "milieu du carré"</u>

B_k = abcd (a,b,c,d : chiffres décimaux de B_k)

d'où : B_k2 = efghijkl

On prend B_{k+1} = ghij

-<u>utilisation de registres à décalage contre réactionnés</u>

Ce dernier procédé a permis d'obtenir assez facilement avec des périodes pseudo-aléatoires courtes, plusieurs valeurs de décalage $\tau 1, \tau 2, \ldots, \tau i$ telles que l'on puisse coder des nombres quelconques par des séquences indépendantes.

Les registres à décalage contre réactionnés sont d'autre part très faciles à réaliser, ce qui n'est pas le cas des autres procédés de génération de bruit.

Nous allons d'abord rappeler le principe et les propriétés des registres à décalage contre réactionnés ; nous verrons ensuite leur utilisation en codage de l'information en représentation stochastique.

3.2. Registres à décalage contre réactionnés

Un registre à décalage contre réactionné est simplement un registre à décalage dont l'entrée à un instant t_i est une fonction des contenus des divers étages à l'instant t_i-1.

Il existe plusieurs descriptions mathématiques possibles. Nous avons adopté celle de la matrice de transition, qui nous paraît la plus simple et qui permet d'obtenir assez facilement les principaux résultats.

Nous considérerons les valeurs des divers étages du registre comme des éléments d'un corps de Galois de module 2 (GF(2)), notés 0 et 1. (cf annexe) Le passage de l'état du registre à l'instant t_i-1 à celui à l'instant t_i est donc, en appelant a1,a2,...,an les contenus des n étages du registre :

$$a1\ (ti) = f\left[a1(ti-1),\ a2\ (ti-1), \ldots, an\ (ti-1)\right]$$

$$a2\ (ti) = a1(ti-1)$$

$$an\ (ti) = an-1\ (ti-1)$$

où f est la fonction de bouclage du registre.

Nous nous limiterons au cas où f est une application linéaire de l'espace vectoriel $GF(2)^n$ dans GF(2) (forme linéaire).

f s'écrit alors :

$\alpha_1 a_1 \oplus \alpha_2 a_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n a_n$ ($\oplus$ étant l'addition sur GF(2))

$\alpha_i = 0$ ou 1 ($\alpha_i \in GF(2)$)

On voit dès lors que le passage du registre de l'état à l'instant t_i-1 à celui à l'état t_i est défini par une application linéaire représentable par une matrice dont les éléments appartiennent à GF(2).

$$\begin{bmatrix} a_1 \ (t_i) \\ a_2 \ (t_i) \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \ (t_i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & & \alpha_n \\ 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & 0 \\ 0 & & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \ (t_i-1) \\ a_2 \ (t_i-1) \\ \cdot \\ \\ a_n \ (t_i-1) \end{bmatrix} \qquad (3\text{-}3)$$

que nous noterons

$A(t_i) = T \ A(t_i-1)$

où A est le vecteur colonne $a_1,\ldots,a_n$ et T la matrice de transition.

La donnée de la matrice T et d'un vecteur A (to) définit entièrement la succession des états :

$A(t_1) = T \ A\ (t_o)$

$A(t_2) = T \ A\ (t_1) = T^2 \ A\ (t_o)$

$A(t_k) = T^k \ A\ (t_o)$

Si le vecteur A (to) est le vecteur nul, on aura $A(t) \equiv o$. Dans le cas contraire, la succession d'états est nécessairement périodique, de période au plus égale à 2^n-1 (automate fini à n variables internes et un état exclu).

Le premier problème qui se pose est de déterminer cette période. Nous nous limiterons à chercher les coefficients 1, 2,..., n pour que cette période soit égale à 2^n-1 (l'on dit alors que la séquence est à période maximale).

Soit l la période :

$T^l = I$ (I : matrice unité)

Nous pouvons calculer T^l à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton : le polynôme caractéristique de T est obtenu par :

$$\det \; T \oplus \lambda I = 0$$

soit : $P(\lambda) = \lambda^n \oplus \alpha_1 \lambda^{n-1} \oplus \ldots\ldots \oplus \alpha_{n-1} \lambda^{n-1} \oplus \alpha_n = 0$

D'après le théorème de Cayley-Hamilton :

$$P(T) = T^n \oplus \alpha_1 T^{n-1} \oplus \ldots\ldots \oplus \alpha_n I = 0$$

d'où : $T^l + \alpha_1 T^{l-1} + \ldots\ldots + \alpha_n T^{l-n} = 0$

d'autre part $T^l \oplus I = 0$ avec $l = 2^{n-1}$

La théorie de la divisibilité des polynômes sur un corps de Galois (B1 à B3) donne pour conditions :

- $P(\lambda)$ irréductible (non divisible par un polynôme de dégré inférieur à n)
- le plus petit entier e tel que $P(\lambda)$ divise $\lambda^e - 1$ est $e = 2^n - 1$.

La liste des coefficients de $P(\lambda)$ pour un certain nombre de valeur de n est donnée dans (B1).

(A) Chaque vecteur $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ apparaît une fois et une seule dans une période, excepté le vecteur (o ____ o).
En effet, si un vecteur apparaît deux fois, on aura :

$$A(ti) = A(tj) = T^{j-i} A(ti)$$

d'où $T^{j-i} = I$, qui n'est vérifié que pour $j-i = k\,(2^n - 1)$.

D'autre part, il y a $2^n - 1$ vecteurs dans la séquence, tous différents : tous les vecteurs sauf (o ____ o) qui est exclu, doivent apparaître une fois et une seule.

(B) Si l'on s'intéresse au contenu d'un étage particulier, la séquence de 0 et de 1 obtenue au cours d'une période comporte 2^{n-1} "1"
et $2^{n-1} - 1$ "0"

Cette propriété découle de la précédente.

(C) Si on appelle x1,x2,...,xk la séquence définie ci-dessus :

$$x_r \oplus x_{r+s} = x_{r+w} \qquad \text{pour tout r.}$$

w entier

C'est-à-dire que la disjonction terme à terme d'une séquence par une version retardée donne une troisième séquence retardée.

En effet, si Ao,A1,... est la séquence écrite vectoriellement Bo=As, B1=As+1,... la séquence décalée, nous avons :

$$A_k = T\, A_{k-1}$$

$$B_k = T\, B_{k-1}$$

$$(A_k \oplus B_k) = T\,(A_{k-1} \oplus B_{k-1})$$

Nous obtenons alors une séquence Co, C1,... déterminée par le vecteur initial.

$$Co = Ao \oplus Bo$$

et la même matrice de transition T : c'est une version retardée de la séquence A puisque tous les termes de C sont ceux de A, écrits dans le même ordre à partir de Co.

Les propriétés ci-dessus définissent le caractère pseudo-aléatoire de la séquence a1,a2,... des états binaires d'un étage du registre. Pour illustrer ces propriétés, calculons la moyenne et la fonction d'autocorrélation de cette séquence :

-Moyenne

$$E\left[a_i\right] = \frac{1}{2^n-1} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} a_i$$

puisque la séquence a une période de 2^n-1. (Σ doit être pris comme le signe d'une sommation arithmétique habituelle et non comme une opération sur GF(2)).

D'après la propriété B :

$$E\left[a_i\right] = \frac{2^{n-1}}{2^n-1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2(2^n-1)} \simeq \frac{1}{2}$$

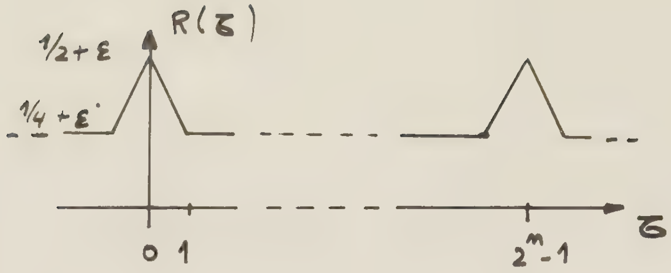


fig 3.1

Autocorrelation d'une sequence a_i

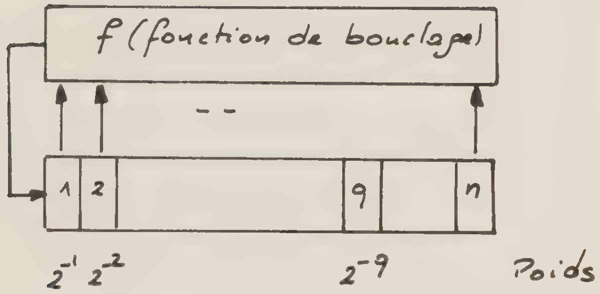


fig 3.2

Generateur de bruit numerique

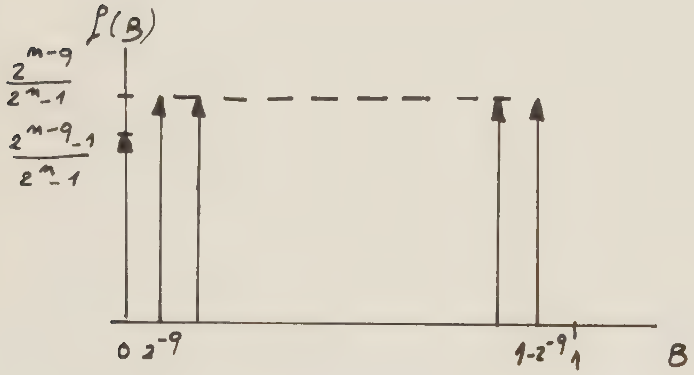


fig 3.3

Densité de probabilité du bruit

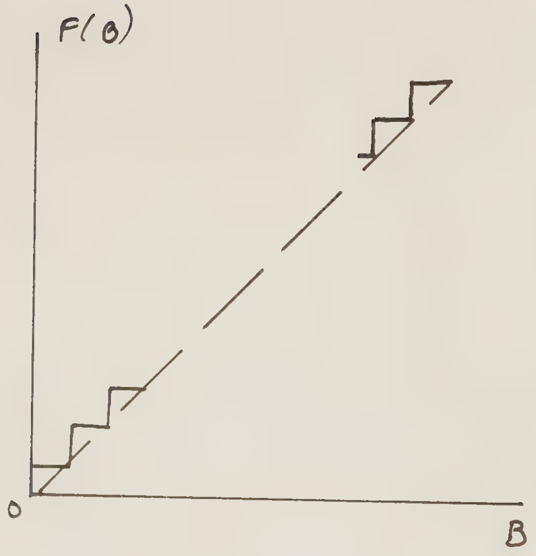


fig 3.4

Fonction de répartition du bruit

-Autocorrélation

$$R(\tau) = \frac{1}{2^n-1} \sum_{i=k}^{k+2^n-1} a_i \, a_{i-\tau}$$

Pour $\tau \equiv o$ (modulo 2^n-1) on retrouve $R(\tau) = E(a_i)$

Pour $\tau \not\equiv o$ (modulo 2^n-1) :

$$a_i \cdot a_{i+\tau} = \frac{1}{2} \left(a_i + a_{i+\tau} - (a_i \oplus a_{i-\tau}) \right)$$

Les symboles + et - étant ici ceux des opérations arithmétiques habituelles portant sur les valeurs arithmétiques 0 ou 1 des aj. Le symbole $\oplus$ est celui de l'addition sur GF(2), donc équivalent à la disjonction de l'algèbre de Boole (voir annexe).

On trouvera alors :

$$R(\tau) = \frac{1}{2(2^n-1)} \left[\sum_{i=k}^{k+2^n-1} a_i + \sum_{i=k}^{k+2^n-1} a_{i+\tau} - \sum_{i=1}^{2^n-1} (a_i \oplus a_{i-\tau}) \right]$$

D'après la propriété (C) : $a_i \oplus a_{i-\tau} = a_{i+w}$

$$\text{d'où} \quad R(\tau) = \frac{1}{2(2^n-1)} \left[2^{n-1} + 2^{n-1} - 2^{n-1} \right] = \frac{2^{n-1}}{2(2^n-1)} \neq \frac{1}{4}$$

La courbe de $R(\tau)$ en fonction de τ est donnée fig. 3.1.

3.3. Utilisation en générateur de bruit numérique

A partir de ce registre, TAUSWORTHE (B5) a proposé un générateur numérique par codage binaire de q étages ($q \leq n$) consécutifs du registre (voir schéma fig. 3.2.)

La valeur B_k du bruit à l'instant t_k est alors donnée en fonction de a_i, contenue des étages du registre par :

$$B_k = \sum_{i=1}^{q} 2^{-i} \, a_{k+i-1} \qquad (3\text{-}4)$$

Compte tenu de la propriété (B) des séquences a_i, la répartition en amplitude de ce bruit est voisine d'une répartition constante sur {0,1} :

-La combinaison 00....0 des q a_i consécutifs apparaît $2^{n-q}-1$ fois dans la séquence.

-Toutes les autres combinaisons apparaissent 2^{n-q} fois, donnant tous les nombres de 2^{-q} à $1-2^{-q}$ quantifiés avec le pas 2^{-q}. Le nombre 1 n'est jamais atteint.

La figure 3.3. montre la densité de probabilité réelle du bruit B. L'écart par rapport à une répartition uniforme est faible. L'erreur maximale introduite par cet écart au niveau du codage est l'écart maximal entre la droite de pente 1 et la fonction de répartition de B (fig 3.4) et vaut 2^{-q}. L'erreur est donc toujours bornée par le pas de quantification 2^{-q}.

Il est possible de calculer la valeur moyenne et l'autocorrélation de B_k :

Moyenne :

$$E\,(B_k) = \frac{1}{2^n-1} \sum_{k=j}^{j+2^{n-1}} \sum_{i=1}^{q} 2^{-i} \,.\, a_{k+i-1}$$

$$= \frac{1}{2^n-1} \sum_{i=1}^{q} 2^{-i} \sum_{k=j}^{j+2^n-1} a_{k+i-1} = \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \quad (1-2^{-q}) \qquad (3\text{-}5)$$

$$E(B_k) = \frac{1}{2} + \frac{1-2^{n-q}}{2(2^n-1)}$$

Cette valeur est très proche de 1/2 si n et q sont assez grands.

Autocorrélation :

$$R_{Bk}(\tau) = \left| E \left[B(t) \,.\, B(t-\tau) \right] \right. = \frac{1}{2^n-1} \sum_{k=j}^{j+2^n-1} B_k \,.\, B_{k-\tau}$$

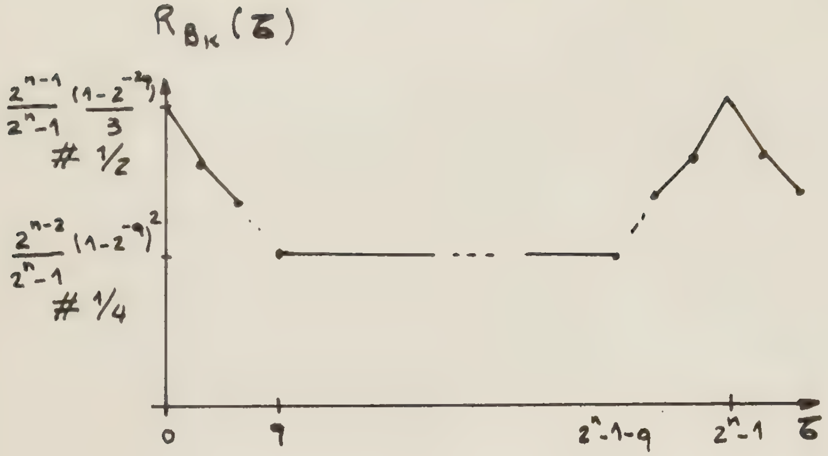


fig 3.5

Autocorrelation du bruit B_K

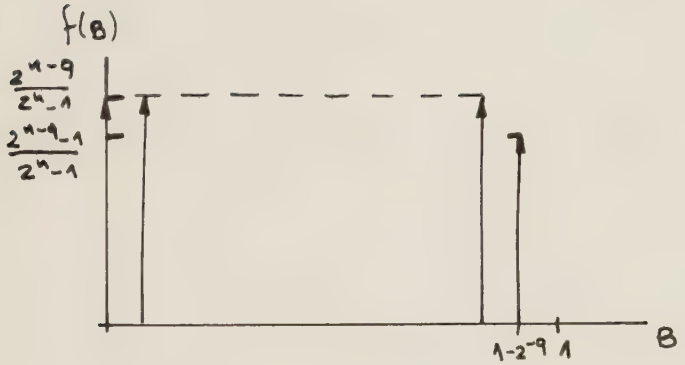


fig 3.6

Densité de probabilité de $\overline{B_K}$

$\overline{B_K} = 1-2^{-q} - B_K$

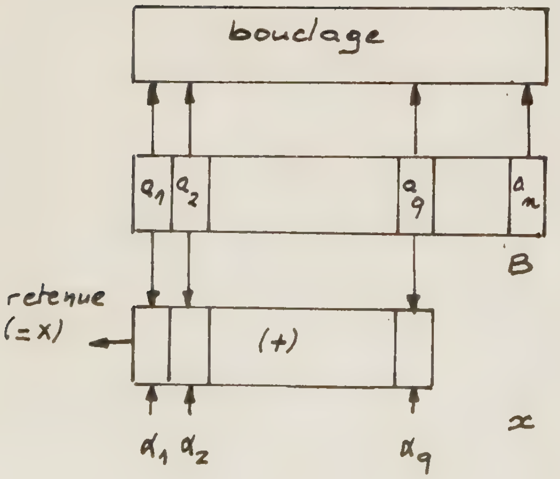


fig 3.7

Principe du codage par la retenue d'un additionneur

$$R_{Bk}(\tau) = \frac{1}{2^n-1} \sum_{k=j}^{j+2^n-1} \sum_{i=1}^{q} \sum_{l=1}^{q} 2^{-(i+l)} a_{k+i-1} \cdot a_{k+\tau+l-1}$$

Or :

$$a_{k+i-1} \; a_{k+\tau+l-1} = \frac{1}{2} \left[a_{k+i-1} + a_{k+\tau+l-1} - (a_{k+i-1} \oplus a_{k+\tau+l-1}) \right]$$

D'après la propriété (C)

$$a_{k+i-1} \oplus a_{k+\tau+l-1} = a_{k+w} \qquad (3\text{-}6)$$

si et seulement si $i=1 \neq \tau+l-1$

Dans le cas où $i-1 = \tau+l-1$, on trouve évidemment

$$a_{k+i-1} \cdot a_{k+\tau+i-1} = a_{k+i-1}$$

En remarquant que

pour $\tau \equiv o \pmod{2^{n-1}}$ (3-6) est vérifiée q fois
$\tau \equiv o \pmod{2^{n-1}}$ " est vérifiée (q-1) fois

$\tau \equiv q \pmod{2^{n-1}}$ " " " 0 "
$\tau \equiv q+1 \pmod{2^{n-1}}$ " " " 0 "

et au delà

On obtient la courbe fig. 3.5

On peut voir qu'une version de bruit B_k est une version retardée $B_{k-\tau}$, avec $k \geq q \pmod{2^{n-1}}$ sont pratiquement non corrélées, ce qui justifie le caractère pseudo-aléatoire de ce générateur.

Nous allons examiner maintenant le codage utilisant ce générateur de bruit.

3.4 Méthodes de codage

Le bruit B étant donné sous forme numérique, nous nous limiterons ici au cas où l'information à coder x est numérique (codage binaire).

Soit le codage élémentaire :

$x \rightarrow X$

numérique stochastique

avec $P(X=1) = x$

le codage est défini par :

$X_k=1$ si $x > B_k$

$X_k=o$ sinon

x étant donné sous la forme d'une représentation numérique oodée en binaire pur limitée à la qè décimale :

$$x = x_1.2^{-1} + x_2.2^{-2} + \ldots\ldots + x_q.2^{-q}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_q$ représentent les chiffres de la figuration binaire de x.

B_k est donné par (3-4) :

$$B_k = a_k.2^{-1} + a_{k+1}.2^{-2} + \ldots\ldots + a_{k+q-1}.2^{-q}$$

Nous aurons donc :

$X=1$ si $x_1.2^{-1} + x_2.2^{-2} + \ldots\ldots + x_q.2^{-q} > a_k.2^{-1} + a_{k+1}2^{-2} + \ldots + a_{k+q-i}2^{-q}$

$X=o$ sinon

(3-7)

On peut trouver l'expression booléenne de X en fonction des x_i et x_j qui sont elles-mêmes des variables booléennes :

(3-7) sera vérifiéesi :

$x > a_1$ soit $x_1 \wedge \overline{a}_1 = 1$

ou : $x_1=a_1$ et $x_2>a_2$ soit $(x_1 \wedge a_1 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{a}_1) \wedge x_2 \wedge \overline{a}_2 = 1$

ou : $x_1=a_1$, $x_2=a_2$ et $x_3>a_3$ soit :

$$(x_1 \wedge a_1 \vee \overline{x}_1 \wedge \overline{a}_1) \wedge (x_2 \wedge a_2 \vee \overline{x}_2 \wedge \overline{a}_2) \wedge x_3 \overline{a}_3 = 1$$

etc.

Finalement :

(3-8)
$$\begin{aligned} X = \;& x_1 \wedge \overline{a}_1 \\ \vee\;& \left[(x_1 \wedge a_1) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{a}_1)\right] \wedge x_2 \wedge \overline{a}_2 \\ \vee\;& \left[(x_1 \wedge a_1) \vee (x_1 \wedge \overline{a}_1)\right] \wedge \left[(x_2 \wedge a_2) \vee (\overline{x}_2 \wedge \overline{a}_2)\right] \wedge x_3 \wedge \overline{a}_3 \\ & --- \\ \vee\;& \left[(x_1 \wedge a_1) \vee (\overline{x}_1 \wedge \overline{a}_1)\right] \wedge \;\ldots\ldots\; \wedge \left[(x_{q-1} \wedge a_{q-1}) \vee (\overline{x}_{q-1} \wedge \overline{a}_{q-1})\right] \wedge x_q \wedge \overline{a}_q \end{aligned}$$

X est la réunion de q termes exclusifs.

En remarquant que :

$$P\left[(x_i \wedge a_i) \vee (\overline{x}_i \wedge \overline{a}_i)\right] \neq \frac{1}{2} \qquad \forall x_i$$

avec une erreur inférieure à 2^{-q}

On retrouve bien le codage linéaire :

$$Pr(X=1) \quad x_1.2^{-1} + x_2.2^{-2} + \ldots. + x_q.2^{-q} = x$$

L'algorithme de codage peut être modifié en introduisant $\overline{B}$, valeur obtenue en complémentant tous les étages du registre et en les codant en binaire pur :

$$\overline{B_k} = \overline{a_k}\, 2^{-1}.+ \overline{a_{k+1}}.2^{-2} + \ldots + \overline{a_{k+q-1}}.2^{-q}$$

$\overline{B}_k$ se déduit de B_k défini par (3-4) par :

$$B_k + \overline{B}_k = 1-2^{-q}$$

La répartition de $\overline{B}_k$ est très voisine d'une répartition constante sur (0,1) (voir fig. 3.6). On peut alors substituer $\overline{B}_k$ à B_k au codage qui devient :

$$X=1 \quad \text{si} \quad x > \overline{B}_k$$

$$X=0 \quad \text{sinon}$$

Or $\overline{B}_k = 1-B-2^{-q}$

On obtient donc :

$$X=1 \quad \text{si} \quad x + B_k > 1-2^{-q} \qquad (3\text{-}9)$$

X est alors simplement la variable booléenne du dépassement d'un additionneur binaire à q étages dont les entrées sont x et B_k (fig. 3.7)
Ce dispositif permet d'utiliser les circuits classiques d'additionneurs binaires, évitant ainsi d'avoir à réaliser le circuit logique de comparaison.

$\overline{B}_k$ étant obtenu en complémentant B_k bit à bit, (3-8) devient :

$$\begin{aligned} X = \; & x_1 \wedge a_1 \\ & \vee \left[(x_1 \wedge \overline{a}_1) \vee (\overline{x}_1 \wedge a_1) \right] \wedge x_2 \wedge a_2 \\ & \vee \left[(x_1 \quad \overline{a}_1) \vee (\overline{x}_1 \quad a_1) \right] \wedge \quad \wedge \left[(x_{q-1} \wedge \overline{a}_{q-1}) \vee (\overline{x}_{q-1} \wedge a_{q-1}) \right] \wedge x_q \wedge a_q \end{aligned} \qquad (3\text{-}10)$$

3.5. Obtention de séquences indépendantes

Nous allons nous intéresser tout d'abord au problème de l'indépendance de deux séquences X et Y :

- X code le nombre x avec le bruit B(t)
- Y " " " y " " " B(t-τ)

Compte tenu de la quantification des entrées, il est inutile de chercher à satisfaire la relation (3-1), que nous remplacerons par :

$$\left| Pr(X \wedge Y=1) - Pr(X=1)\ Pr(Y=1) \right| \leq 2^{-q} \qquad (3\text{-}11)$$

Cette dernière inégalité signifie que le résultat d'une multiplication aura une erreur maximale égale au pas de quantification. Nous dirons que deux séquences satisfaisant l'inégalité (3-11) sont pseudo-indépendantes et non indépendantes ce qui correspondrait à (3-1).

En utilisant la relation (3-3) qui définit la succession des états du registre et l'une des deux relations (3-8) ou (3-10) qui définissent X et Y, il est théoriquement possible de résoudre ce problème.

Toutefois, cette approche du problème est très difficile et n'a pas pour le moment conduit à une solution générale. Nous avons donc utilisé une approche indirecte qui consiste à calculer la différence

$Pr\ (X \wedge Y=1) - Pr(X=1)\ Pr(Y=1)$

à l'aide d'une simulation sur calculateur numérique.

Avant d'exposer le problème sous sa forme générale, nous allons examiner un exemple simple :

Considérons pour générateur de bruit le registre à décalage à quatre étages (fig 3.8).Un polynôme générateur donnant une séquence de longueur maximale est alors (B1)

$P(x) = 1 \oplus x \oplus x^4$

On utilise 3 étages de ce générateur pour obtenir un bruit numérique ; la quantification est alors de $2^{-3} = \frac{1}{8}$. La période pseudo-aléatoire vaut $2^4-1=15$.

L'évolution de B pendant la période est :

t	séquence des états du registre	valeur de B
1	0001	1/2
2	1000	0
3	1100	1/8
4	1110	3/8
5	1111	7/8
6	0111	7/8
7	1011	3/4
8	0101	5/8
9	1010	1/4
10	1101	5/8
11	0110	3/8
12	0011	3/4
13	1001	1/2
14	0100	1/8
15	0010	1/4

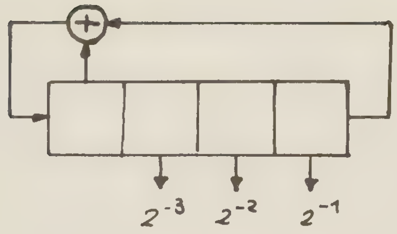


fig 3.8

Generateur de bruit

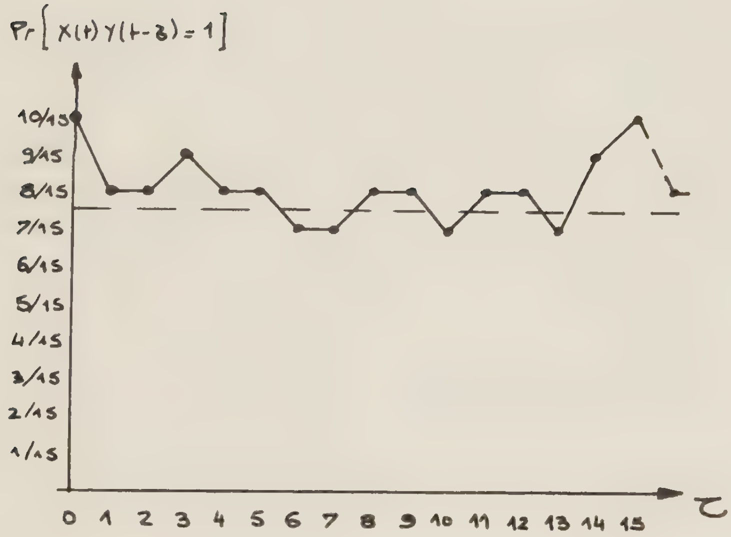


fig 3.9

Intercorrélation de X et Y

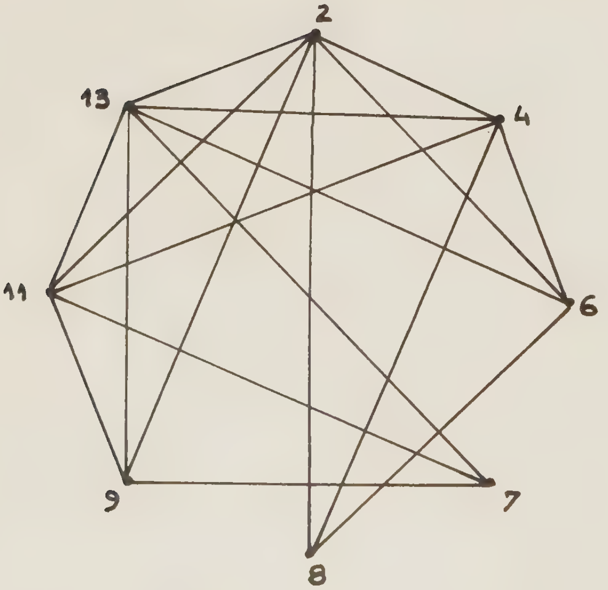


fig 3.10

Table de décalages

— EXEMPLE —

Supposons que l'on veuille effectuer le produit de
$x = 5/8$
par $y = 3/4$
à l'aide du multiplieur stochastique.

Pour cela, x sera représentée par X tel que X=1 si $x+B_k > 1-2^{-8}$ (3-9) et y par Y=1 si $x + B_{k-\tau} > 1-2^{-8}$

En essayant successivement toutes les valeurs de τ, on a relevé la valeur de $Pr(X \wedge Y = 1)$
Les résultats sont reportés fig. 3.9.

$xy = \frac{15}{32}$: les seules valeurs satisfaisant à l'inégalité (3-11) :

$$\left| Pr(XY=1) - \frac{15}{32} \right| \leq 2^{-8}$$

sont $\frac{7}{15}$ et $\frac{8}{15}$

Les valeurs de τ permettant d'effectuer, avec le registre considéré, la multiplication de $\frac{5}{8}$ par $\frac{3}{4}$ en codant ces valeurs avec les bruits $B(t)$ et $B(t-\tau)$ sont donc :

1,2,4,5,6,7,8,9,10 et 11

Les autres valeurs correspondent à des résultats incorrects.

Les valeurs de τ donnant des résultats incorrects sont d'une façon générale fonction du polynôme générateur du registre et de la valeur des informations codées.

L'ensemble des valeurs de τ permettant de satisfaire l'inégalité (3-11) pour un registre donné mais pour toutes les valeurs possibles de $Pr(X=1)$ et $Pr(Y=1)$ est l'intersection des ensembles des valeurs relatives à un couple $Pr(X=1)$, $Pr(Y=1)$ donné comme ci-dessus.

On s'aperçoit que cette intersection est non vide, quel que soit q au plus égal à n, ce qui signifie qu'il est toujours possible de trouver des valeurs de décalage τ permettant de coder des informations à l'aide de séquences

pseudo-indépendantes (et non indépendantes à cause du terme d'erreur introduite).

Ce résultat est très important et caractérise le procédé de génération de bruit utilisé : il est possible d'effectuer, à l'aide de la représentation stochastique, le produit de deux grandeurs quantifiées en 2^q niveaux à l'aide de séquences dont la période est seulement 2^q-1.

Ce procédé de test des fonctions d'intercorrélation utilise un algorithme très simple pour le calcul complet d'une fonction d'intercorrélation (voir annexe). Il faut toutefois remarquer que l'essai de toutes les valeurs de Pr(X=1) et Pr(Y=1) pour un registre et une quantification donnés conduit à des temps de calculs prohibitifs. Nous avons donc cherché s'il était possible de limiter les essais à certaines valeurs de Pr(X=1) et Pr(Y=1).

Il est en effet suffisant de n'effectuer le test que sur les produits de puissances de 2 donnant pour résultat 2^{-Q}, soit :

$E(X) = 2^{-1}$ $\qquad$ $E(Y) = 2^{1-Q}$

$E(X) = 2^{-2}$ $\qquad$ $E(Y) = 2^{2-Q}$

$E(X) = 2^{1-Q}$ $\qquad$ $E(Y) = 2^{-1}$

On peut justifier ce résultat par le fait, que pour $x = E(X) = 2^{-i}$, $i = 1,2,\dots,q$, les expressions (3-8) et (3-10) deviennent respectivement

$$X = \bar{a}_1 \wedge \bar{a}_2 \wedge \dots\dots \bar{a}_i \qquad (3\text{-}12)$$

$$X = a_1 \wedge a_2 \wedge \dots\dots \wedge a_i \qquad (3\text{-}13)$$

La relation

$\left| E(XY) - E(X)\,E(Y) \right| < 2^{-Q}$ devient, pour $E(X)=2^{-i}$ et $E(Y) = 2^{i-Q}$:

$$\left| E\left[a_k\, a_{k+1} \dots \wedge a_{k+i-1} \wedge a_{k-\tau} \wedge a_{k-\tau+1} \dots \wedge a_{k-\tau+Q-i-1} \right] - 2^{-Q} \right| < 2^{-Q} \qquad (3\text{-}10)$$

En écrivant toutes les relations de ce genre et en utilisant la propriété :

$$E\left[a_h\, a_{h+l} \right] = 2^{-2} \qquad \forall l \not\equiv o \pmod{R^n-1}$$

(cf fig. 3.1)

on trouve que tous monôme formé de r variables parmi a_k, a_{k+1}, a_{k+Q-1}, $a_{k-\tau}$, ... $a_{k-\tau+Q-1}$ a pour probabilité 2^{-r} pour tout r inférieur ou égal à Q.

Par suite, si nous considérons les deux fonctions booléennes quelqonques $f(a_k, a_{k+1},\ldots, a_{k+q-1})$ et $g\,(a_{k-\tau}, a_{k-\tau+1},\ldots,a_{k-\tau+q-1})$, en effectuant leur décomposition en somme de monômes disjoints, l'expression de $Pr(f\Lambda g=1)$ comporte une partie principale égale au produit trouvé de $Pr(f=1)$ par $Pr(g=1)$ et un terme d'erreur d'ordre supérieur, provenant des monômes de plus de q termes de l'intersection de f et g.

D'autre part, si l'on choisit trois séquences X,Y,Z obtenues à l'aide des bruits $B(t)$, $B(t-\tau_1)$, $B(t-\tau_2)$ tellesque :

$$|Pr(X\Lambda Y=1) - Pr\,(X=1)\,Pr(Y=1)| \leq 2m^{-q}$$

$$|Pr(X\Lambda Z=1) - Pr\,(X=1)\,Pr(Z=1)| \leq 2^{-q}$$

$$|Pr(Y\Lambda Z=1) - Pr\,(Y=1)\,Pr(Z=1)| \leq 2^{-q}$$

Alors

$$Pr(X\Lambda Y\Lambda Z=1) - Pr(X=1)\,Pr(Y=1)\,Pr(Z=1) \leq 2^{-q+1}$$

C'est à dire qu'il y a cumul d'erreurs, de la même façon que les erreurs d'arrondi s'ajoutent dans les multiplications numériques.

Cette propriété, vérifiée expérimentalement sur un grand nombre de cas n'a pu être démontrée rigoureusement.

Enfin, remarquons que les codages obtenus par (3-8) et (3-10) sont équivalents et strictement interchangeables vis à vis de la condition de pseudo-indépendance, le passage de l'une à l'autre de ces expressions s'obtenant par complémentation des a_i : si a_i et a_j sont indépendants, il en est de même pour a_i et $\overline{a_j}$; $\overline{a_i}$ et $\overline{a_j}$; $\overline{a_i}$ et a_j.

Nous avons été amenés à construire des "tables de décalage", qui sont l'ensemble des valeurs de τ trouvées par le test des diverses fonctions d'autocorrélation pour un codage donné. C'est à partir de ces tables qu'on peut choisir les diverses valeurs de décalage entre bruits utilisables pour réaliser plusieurs séquences pseudo-indépendantes.

3.6. Utilisation des tables de décalage

Pour réaliser r codages pseudo-indépendants, il faut utiliser r source de bruit :

$B(t)$, $B(t-\tau_1)$,...., $B(t-\tau_{r-1})$, où sont d'abord τ_1, τ_2,...., τ_{r-1} appartiennent à la table de décalage correspondant au registre considéré.

Nous avons vu que la pseudo-indépendance deux à deux était suffisante, il suffira donc que toutes les différences $\tau_j-\tau i$ appartiennent également à la table.

Le choix de ces valeurs pourra être fait à l'aide d'un graphe de compatibilité. Ce graphe comporte pour sommets les valeurs de τ de la table. On construit un arc entre deux sommets τi et τj si la différence $\tau i-\tau j$ appartient elle-même à la table. Dès lors, on obtiendra un système de valeurs τi, τj, τk,... de décalages acceptables s'il existe un sous graphe complet de sommets τi, τj, τk,... Le graphe correspondant à l'exemple cité plus haut est donné fig. 3.10. La table comporte les valeurs 2,4,6,7,8,9,11,13. On peut voir que tout sous graphe complet a une dimension maximale de 4, par exemple : 2,4,6,8.

Pour cet exemple, il est possible de coder 5 informations à l'aide de séquences pseudo-indépendantes en utilisant comme bruits

B1 = B(t)

B2 = B(t-2)

B3 = B(t-4)

B4 = B(t-6)

B5 = B(t-8)

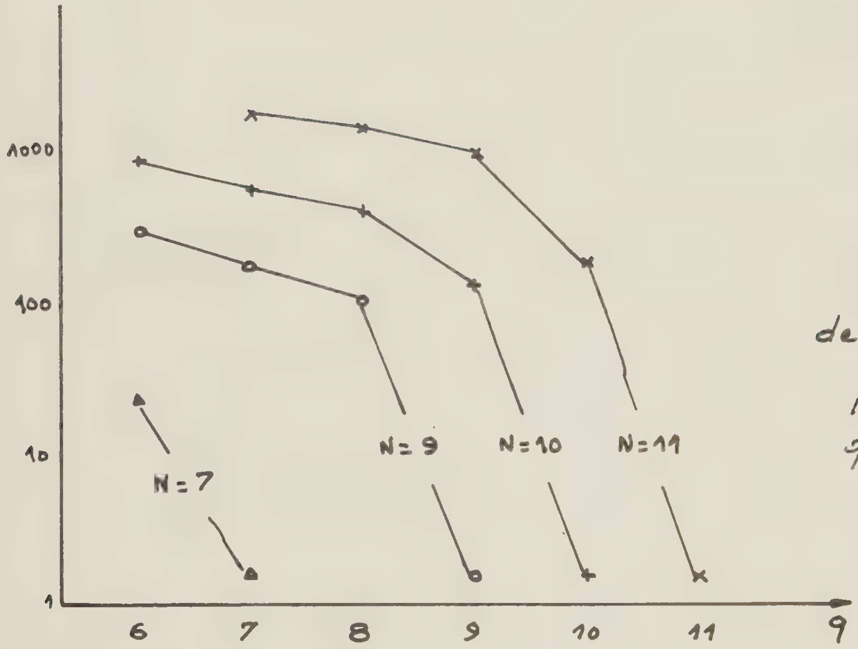


fig 3.11

Nombre de valeurs
de la table de décalage

N : longueur du registre
q : nombre de bits utilisés

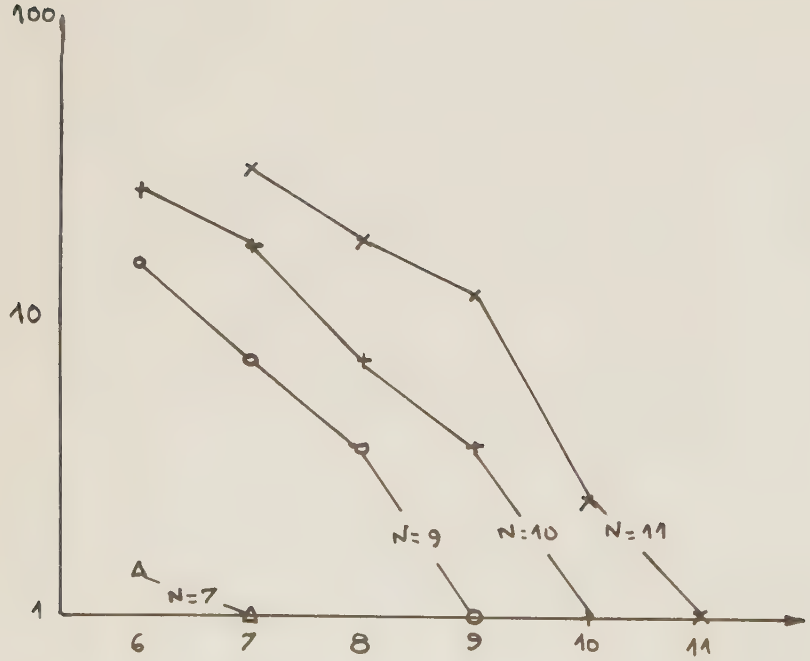


fig 3.12

Dimension du
sous graphe trouvé

Cet exemple conduisait à un graphe très simple, mais le nombre des sommets du graphe croit très vite avec N, nombre d'étages du registre. Par exemple, dans le cas n=10, q=8 (8 bits utilisés au codage), il est de 550. Un tel graphe est déjà difficile à traiter par calculateur numérique. C'est pourquoi nous n'avons pas pu extraire le sous graphe complet de dimension maximale -qui correspond au plus grand nombre de variables codées - dans tous les cas.

Les résultats obtenus sont portés sur les figures 3.11 et 3.12 : la figure 3.11 donne le nombre de sommets du graphe, c'est à dire la dimension de la table de décalage en fonction de n et q, la figure 3.12 donne la dimension du sous graphe complet le plus grand que nous avons trouvé dans cette table.

Pour chaque valeur de n, il existe plusieurs polynômes générateurs possibles, à chaque polynôme pour une même valeur de n va correspondre une table particulière. Nous n'avons reporté dans les figures 3.11 et 3.12 que les résultats correspondant à un seul polynôme, soit :

pour N=11 $\quad 1 \oplus x^2 \oplus x^{11}$

N=10 $\quad 1 \oplus x^3 \oplus x^{10}$

N=9 $\quad 1 \oplus x^4 \oplus x^9$

N=7 $\quad 1 \oplus x^3 \oplus x^7$

(Pour des raisons de simplicité, nous nous étions limités au cas des polynômes générateurs à trois termes, or aucun polynôme à trois termes n'existe pour n=8 d'où son absence dans les courbes).

3.7. Réalisation des décalages

Nous venons de voir qu'il était possible de trouver certaines valeurs $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_l$ de décalages telles que les bruits

$B(t)$

$B(t-\tau_1)$

$B(t-\tau_l)$

puissent être utilisés pour coder (l+1) variables à l'aide de séquences pseudo-indépendantes.

Comment ces décalages vont-ils être réalisés ?

Une première solution est, bien sur d'utiliser des registres à décalage pour transmet e le bruit soit sous forme parallèle, soit sous forme série.
On peut également coder les diverses informations avec le même bruit et décaler les séquences obtenues. Le résultat est le même au point de vue de la condition d'indépendance, mais on introduit un retard sur l'information codée, ce qui peut dans certains cas entraîner des erreurs importantes dans le comportement dynamique (voir chapitre 5).

Une autre méthode est utilisable, qui permet d'éviter l'utilisation de registres à décalage. On fait, dans ce cas, appel à la propriété (C) :

$$a_i \oplus a_{n \to v} = a_{i+w}$$

Une version retardée a_{i+w} de ai peut toujours s'exprimer linéairement en fonction de ai, ai+1,..., ai+N-1, les retards sont réalisés par de simples combinaisons linéaires des étages du registre.

Dans le cas de l'exemple n=4, q=3 déjà évoqué, le polynôme générateur est :

$$1 \oplus x \oplus x^4$$

il correspond à la relation de récurrence

$$a_k = a_{k1} \oplus a_{k-4} \qquad (3\text{-}14)$$

D'après (3-14) Les décalages à réaliser sont 2,4,6,8

$$a_2 = a_2$$

$$a_4 = a_4$$

$$a_6 = a_5 \oplus a_2 = a_4 \oplus a_1 \oplus a_2$$

$$a_8 = a_7 \oplus a_4 = a_6 \oplus a_3 \oplus a_4 = a_5 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4 = a_4 \oplus a_1 \oplus a_2 \oplus a_3 \oplus a_4$$

$$= a_1 \oplus a_2 \oplus a_3$$

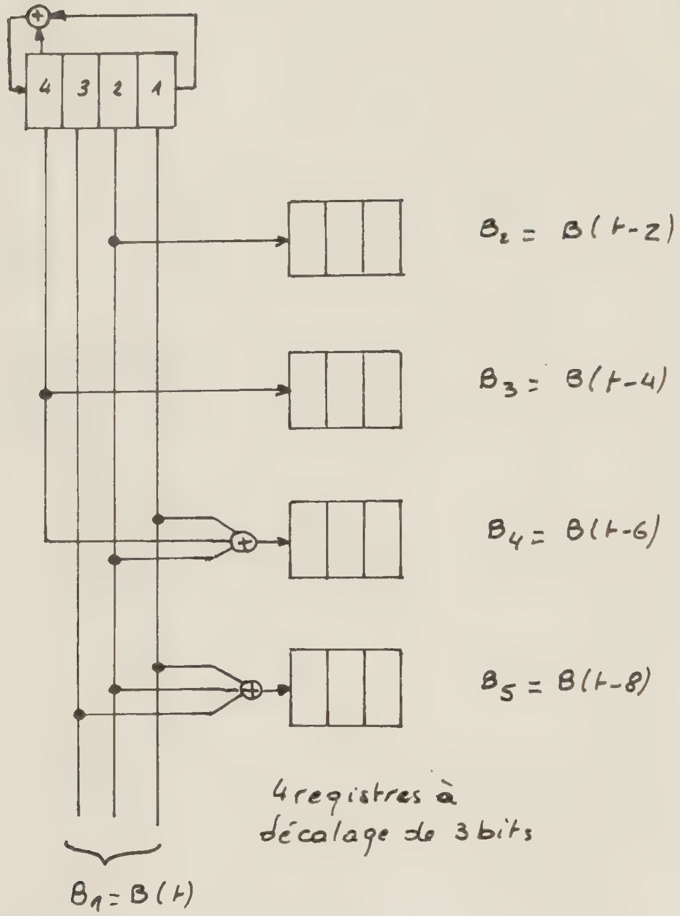


fig 3.13

Obtention de
bruits décalés
(exemple)

On peut alors réaliser B(t), B(t-2), B(t-4), B(t-6) sous forme série par le montage donné fig. 3.13.

Enfin, une dernière solution, particulièrement intéressante lorsqu'on désire réaliser un grand nombre de décalages, consiste à modifier le générateur de bruit pour minimiser les valeurs des décalages nécessaires.

Supposons que l'on aie extrait de la table de décalage une suite de k valeurs multiples :

$\tau o, 2\tau o, \ldots, k\tau o$ où τo est premier avec 2^{n-1}

Le problème est alors de réaliser :

$B_1 = B(t)$

$B_2 = B(t-\tau o)$

$B_3 = B(t-2\tau o)$

$B_k = B(t-k\tau o)$

Considérons l'automate défini par :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \\ a_n \end{bmatrix} = T^{\tau o} \begin{bmatrix} a_1 \\ \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

à l'instant t à l'instant t_{i-1}

où T est la matrice de transition du registre initial.

La succession des états de ce nouvel automate est celle obtenue en échantillonnant à la cadence τo la succession des états du registre défini par la matrice T. On montre alors (B3) que si τo est premier avec 2^{n-1}, les propriétés statistiques de la nouvelle séquence sont les mêmes que celles de la séquence initiale. Si B' est le bruit réalisé par codage binaire de q a_i

consécutif de ce nouvel automate, nous aurons :

Si $B'1\ (t) = B_1\ (t)$

$B'1\ (t+1) = B_1(t+\tau o)$

$B'2\ (t+2) = B_2(t+2\tau o)$

etc...

Les décalages de τo top d'horloge avec le registre initial sont équivalents à des décalages d'un seul top d'horloge avec le nouvel automate.

Cette méthode conduit à la réalisation d'un générateur de bruit assez complexe, qui n'est plus un registre à décalage mais simplifie considérablement la réalisation des décalages.

3.8. Conclusion de l'étude du générateur de bruit

Le générateur de bruit choisi, basé sur l'utilisation de registres à décalage contre réactionnés a permis de trouver une solution intéressante au problème du codage d'informations par séquences pseudo-indépendantes

La démarche que nous avons adopté dans ce chapitre est principalement expérimentale. La raison en est que beaucoup de propriétés de ces registres sont encore inconnues. Si par exemple, nous considérons la propriété (B) :

$$a_i + a_{i+n} = a_{i+w}$$

la relation $w = f(u)$ n'est pas connue dans le cas général. Il semble qu'une étude globale des propriétés mathématiques des registres soit encore à faire, aucune publication n'a en effet encore abordé le problème que nous avions posé, qui était d'obtenir des codages pseudo-aléatoires et pseudo-inépendants à partir de registres à décalage. Cette étude théorique sortait du cadre de ce travail, il lui a été préféré une méthode d'approche par simulation qui a conduit à des résultats satisfaisants en vue de la conception d'un calculateur utilisant la représentation stochastique.

Nous avons vu, en effet, que par des méthodes de test de fonctions d'intercorrélation, on peut obtenir des tables de valeurs de décalages entre versions de bruit qui satisfont à la relation fondamentale (3-15)

$$\left| P\left[B(t) < x,\ B(t-\tau) < y\right] - P\left[B(t) < x\right] .\ P\left[B(t-\tau) < y\right] \right| \leq 2^{-q} \quad (3\text{-}15)$$

Ceci dès que la période pseudo aléatoire atteint $2^{Q}-1$.

Ce résultat montre l'intérêt de la démarche adoptée : si nous avions cherché une condition d'indépendance stochastique entre B(t) et B(t-τ), qui est la condition proposée dans les diverses publications traitant du calcul en représentation stochastique, il aurait fallu écrire :

$$\left| P\left[B(t)=x,\ B(t-\tau)=y\right] - P\left[B(t)=x\right] P\left[B(t-\tau)=y\right] \right| \leq 2^{-q}$$

quels que soient x et y.

On peut voir que pour satisfaire à cette relation, il faut que B(t-τ) puisse prendre 2^{q-1} valeurs différentes avec la même probabilité, sachant une réalisation particulière de B(t). B(t) prenant 2^{q} valeurs, la période est nécessairement supérieure ou égale à

$$L = 2^{2q-1}$$

Nous avons dans le chapitre 2, montrer l'intérêt en matière de précision de l'utilisation de séquences pseudo-aléatoires à période courte. Nous allons voir, dans le chapitre 4, que la bande passante, pour une précision donnée, est approximativement proportionnelle à $L^{-1/2}$, où L est la période. Le gain introduit ici est donc de l'ordre de $2^{q-1/2}$. Pour une précision de 4.10^{-3} (8 bits), la bande passante est donc multipliée par $2^{7/2}$: 11.

Le test des fonctions d'autocorrélation aboutit à l'élaboration d'une table de valeurs de décalage, ensemble des valeurs de décalage satisfaisant à (3-15).

Il est alors possible par construction d'un graphe de compatibilité, d'extraire de ces table un ensemble de valeurs de décalage qui va permettre le codage de plusieurs informations en vue de leur traitement à l'aide d'opérateurs algébriques. La rapide croissance des courbes donnant le nombre de décalages compatibles trouvé en fonction de N-Q, qui définit le rapport entre la période pseudo-aléatoire et la quantification montre bien qu'il est possible d'utiliser des séquences relativement courtes tant que le nombre de variables traitées n'est pas très grand. Dans le cas contraire, (nombre de variables très grand), la période devient également très grande et l'intérêt, en matière de précision, des séquences pseudo-aléatoires disparaît, la séquence pseudo-aléatoire tendant vers une séquence de Bernoulli.

Nous verrons, dans le chapitre 6, quelles conséquences ces résultats impliquent pour la conception de structures de calcul utilisant la représentation stochastique.

ETUDES EN SIMULATION
ANALYSE DE LA PRÉCISION

4.1. Précision du calcul stochastique

Dans les chapitres précédents ont été définis la structure des opérateurs et le codage en représentation stochastique. Il reste, puisque nous connaissons tous les éléments de base, à estimer les performances de ce mode de traitement avant d'aborder le problème de la conception des structures de calcul. Nous avons réalisé cette étude en deux phases, la première en simulation sur calculateur numérique, la seconde à l'aide d'une maquette d'un opérateur spécialisé que nous décrirons dans le chapitre 5.

Il faut distinguer deux types d'erreur différents dans un calculateur en représentation stochastique. Le premier tient à la quantification et à l'erreur de "pseudo indépendance". Cette erreur est équivalente à l'erreur d'arrondi d'un calculateur numérique. Il y a, au passage de plusieurs opérateurs en cascade, un cumul de ces erreurs et donc une dégradation de la précision au niveau de chaque opérateur algébrique. La détermination du pas de quantification de l'entrée doit donc être faite à partir de la précision du résultat souhaitée,en considérant la somme des erreurs au passage de chaque opérateur. Ce problème est un problème très classique en analyse numérique, nous n'y reviendrons pas dans le cadre de cette étude.

Le second type d'erreur, propre celui là à la représentation stochastique, est introduit par le décodage. Nous avons vu que le décodage est toujours obtenu par une estimation de valeur moyenne et par conséquent entaché de fluctuations statistiques.

Pour l'étude de la précision du décodage, il faut distinguer deux cas, suivant la nature de l'organe de décodage :

- soit celui-ci est effectivement l'estimation d'une valeur moyenne d'une séquence aléatoire, cette estimation sera faite par un filtrage passe-bas ; le

procédé de comptage d'impulsions pendant un temps donné est en effet de réalisation trop complexe et n'offre pas un très grand intérêt.

- soit l'organe de décodage est simplement constitué par la lecture du contenu d'un intégrateur par rapport au temps. Ce contenu étant une information numérique, est directement exploitable à l'extérieur du calculateur en représentation stochastique (Cf § 1.1.).

Il y a lieu également, de distinguer deux cas, suivant le mode d'exploitation :

- Précision "statique", cas qui se rencontre lors de l'estimation d'une valeur moyenne constante.
- Précision "dynamique", la valeur moyenne évolue dans le temps (d'une façon générale, de manière suffisamment lente devant la dynamique du procédé de décodage).

Enfin, deux critères de précision peuvent être utilisés :

- L'erreur instantanée maximale
- L'erreur quadratique moyenne (écart-type).

Le premier de ces critères traduira la précision lorsque les résultats sont prélevés à des instants discrets et utilisés pour un autre traitement, en particulier dans le cas d'un couplage avec un calculateur numérique.

Le second traduira l'imprécision sous une forme "énergétique" et correspond plutôt au cas où le résultat est utilisé pour la commande d'un processus. Il va sans dire que ce second critère est beaucoup moins contraignant que le premier.

Nous avons évoqué, dans le second chapitre, un modèle hypergéométrique pour traduire la statistique du deuxième ordre de l'estimateur. L'expérience a montré que l'écart-type de la loi hypergéométrique constitue une assez bonne approximation de l'écart-type réel de l'estimateur (l'erreur ne dépasse généralement pas 5 %). Mais, par contre, des essais de comparaison des distributions hypergéométriques et réelles ont montré une différence très sensible. D'autre part, même dans le cas de l'erreur moyenne quadratique, il semble très difficile

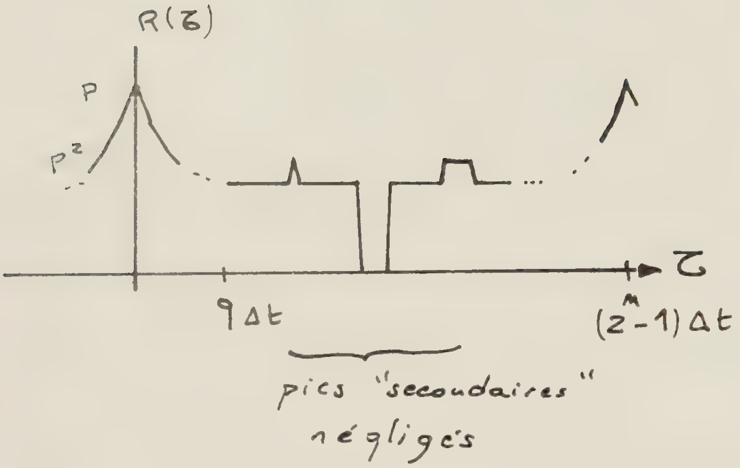


fig 4.1

Autocorrélation d'une séquence (exemple)

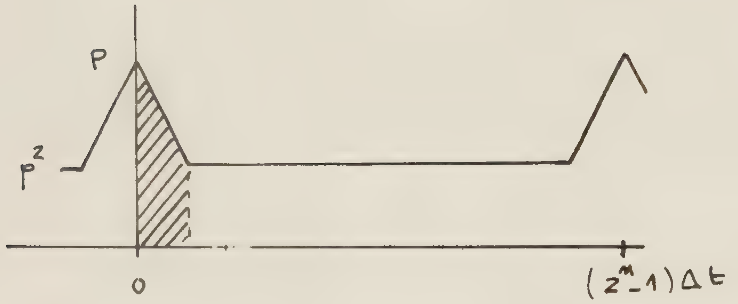


fig 4.2

Forme simplifiée

$p = Pr(x=1)$
Δt: période d'horloge
$(2^n-1)\,\Delta t$: période pseudo aléatoire

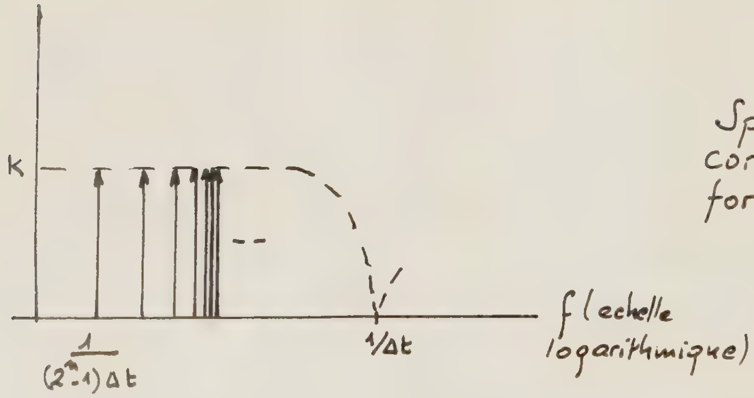


fig 4.3

Spectre de puissance correspondant à la forme simplifiée

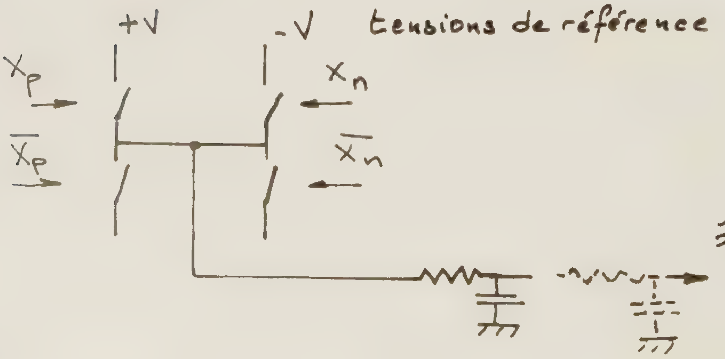


fig 4.4

Principe du filtrage

de déduire théoriquement l'écart-type de l'estimateur "dynamique" (lorsque les valeurs moyennes évoluent dans le temps) de l'écart-type "statique" donné par la formule (2-2).

Une étude de la précision du décodage par filtrage passe-bas a été donnée dans (A8). Nous en rappelerons brièvement les principaux résultats.

4.2. Cas d'un filtrage passe-bas

L'étude proposée par HIRSCH dans (A8) comporte le calcul approché du spectre d'une séquence pseudo-aléatoire. Le processus de filtrage passe-bas étant linéaire, il est possible alors de calculer l'erreur quadratique moyenne. Le cas de l'erreur instantanée maximale est, lui, traité par une approche expérimentale.

Le spectre d'une séquence est un spectre de raies (du fait de la périodicité). Ce spectre peut s'obtenir en prenant la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation de la séquence correspondante. Nous avons vu l'allure des fonctions d'intercorrélation au chapitre 3. Les fonctions d'autocorrélation qui en sont un cas particulier conservent la même forme mais sont de plus symétriques par rapport à l'axe $\tau = 0$ (fig. 4.1.). On assimile en première approximation ces courbes à la forme simplifiée de la fig. 4.2., c'est-à-dire que l'on néglige les "pics secondaires" et que l'on approxime le début de la courbe par une seule droite. Le spectre correspondant est alors constitué d'une raie centrale (pour $f = 0$) qui provient de la composant continue du signal (valeur moyenne non nulle) et des raies d'égale puissance moyenne en basse fréquence (voir fig. 4.3.)

On peut alors calculer les fluctuations efficaces après passage dans un filtre linéaire quelconque. On trouvera fig. 4.4. un exemple (tiré de A8) de résultat obtenu avec un filtre du premier ordre.

Cette approche ne permet pas le calcul de l'erreur maximale instantanée, qui est obtenue de manière expérimentale.

Nous allons donner deux formules empiriques, tirées de (A8) pour des filtrages R-C du premier et du second ordre, transposées au cas de la représentation bifilaire symétrique (voir fig 4.4.)

Erreur statique maximale, rapportée à V :

-filtre du 1er ordre
constante de temps T

$$\frac{\Delta \hat{x}^1}{V} = \frac{\Delta t}{T} \cdot 2^{\frac{n}{2}+1} \qquad (4-1)$$

-filtre du 2ème ordre
deux constantes de temps
égale T

$$\frac{\Delta \hat{x}^2}{V} = \frac{\Delta t^2}{10T^2} \cdot 2^{\frac{3n}{2}+1} \qquad (4-2)$$

où n est le nombre d'étages du générateur de bruit.

Si nous ramenons ces erreurs à la dynamique totale de variation (2V), on obtient :

$$\frac{\Delta \hat{x}1}{2V} = \frac{\Delta t}{T} \cdot 2^{n/2}$$

$$\frac{\Delta \hat{x}\ 2}{2V} = \frac{\Delta t^2}{10T^2}\ 2^{3n/2}$$

Par exemple, pour n = 10 et $\Delta t = 10^{-6}$ Δ, on obtient :

1er ordre : $T_1 = 6{,}4$ ms pour $\frac{\Delta \hat{x}}{V} = 10^{-2}$

$T_2 = 2{,}5$ ms pour $\frac{\Delta \hat{x}}{V} = 10^{-2}$

Nous verrons dans le chapitre 5 que ces résultats sont en accord avec ceux que nous avons obtenus expérimentalement.

Compte tenu de la présence du filtre, le problème de la rapidité des variations de la valeur moyenne (correspondant à l'hypothèse de stationnarité) est résolu indirectement. En effet, pour que le résultat de l'estimation soit acceptable, même en ne tenant pas compte des fluctuations, la dynamique de variation des signaux d'entrée doit être faible par rapport au temps de réponse du filtre. Lorsque cette condition est remplie, on est suffisamment proche du cas où la valeur moyenne est constante et la précision dynamique tend vers la précision statique.

4.3. Cas de la lecture d'un intégrateur

Dans ce cas, la formulation du problème est un peu différente.

L'intégrateur (fig 4.5) est un registre compteur-décompteur à m étages dont q seulement sont conservés. Les m-q étages restant sont analogues à des "bits de garde", qui peuvent être erronés ; ou s'impose comme condition que les q étages de poids le plus fort soient exacts.

Le problème de fluctuations peut alors se poser sous deux formes :

-Pour m donné, quelle est la plus grande valeur possible de q pour que le contenu de l'étage q ne fluctue pas ?

-Pour q donné, quel est le plus petit m pour la même condition ?

Bien entendu, le contenu de l'étage q devrait -comme tous les autres- être une variable aléatoire. Les conditions ci-dessus ne pourraient en toute rigueur être données qu'à un certain niveau de confiance dans une conception strictement aléatoire. Dans la conception pseudo-aléatoire, elles peuvent être données exactement (ce qui correspond à un niveau de confiance de 100 %).

Pour l'intégrateur en représentation bifilaire, il est sans intérêt de considérer une précision statique. En effet, pour que la sortie de l'intégrateur soit constante, il faut que son entrée soit nulle ; le zéro étant codé par un signal identiquement nul, il ne peut y avoir aucune fluctuation.

Nous considérons donc le cas d'une entrée constante : soit en entrée de l'intégrateur une séquence X telle que :

$$\Pr\,(X=1) = p = \text{constante à partir du temps } t = o$$

La constante de temps de l'intégrateur étant $T = \frac{f_H}{2^{m-1}}$ (1-10), si la valeur initiale de l'intégrateur est o, le résultat de l'intégration au temps t doit être :

$$\frac{f_H}{2^{m-1}}\ p.t$$

Posons : $f_H.t = k$

k représente le nombre de tops d'horloge depuis le temps o jusqu'au temps t.

La valeur exacte de l'intégrale est alors : $S = k.2^{-(m-1)}$

Nous allons ici nous servir de l'écart-type du modèle hypergéométrique d'après (2-2)

$$\sigma_x (k) = \frac{1}{k} \sqrt{p(1-p) \quad h \frac{L-h}{L-1}}$$

avec $h \equiv k \pmod{L}$

où L est la période du générateur de bruit.

Or : $S = 2^{-(m-1)} \sum_{i=o}^{i=k} X_k$

d'où $\sigma_s (k) = 2^{-(m-1)} \sqrt{p(1-p) \quad h \frac{L-h}{L-1}}$

avec $o \leq h < L$

Cette expression est maximale pour $h = \frac{L}{2}$ et $p = \frac{1}{z}$

On trouve alors :

$$\sigma_{s \ max} \leq 2^{-(m+1)} \quad L$$

Nous avons trouvé expérimentalement que l'erreur maximale est bornée par un terme de la forme :

$$\varepsilon_{max} = A.\sigma_s$$

La valeur de A a été trouvée comprise entre 2 et 2,8 suivant les séquences. Nous prendrons pour borne de l'erreur :

$$\varepsilon_{max} = 2{,}8 \ \sigma_{s \ max} \leq 2{,}8 \ . \ 2^{-(m+1)} \quad L$$

Or : $L = 2^n - 1$

n étant le nombre d'étages du générateur de bruit.

Par suite :

$$\varepsilon_{max} \leq 2,8 \cdot 2^{\frac{n}{2}-m-1} \qquad (4-3)$$

Si nous imposons que le contenu de l'étage q est correct, ε_{amax} doit être borné par 2^{-q} soit :

$$\varepsilon_{max} \leq 2,8 \cdot 2^{\frac{n}{2}-m-1} \leq 2^{-q}$$

On en tire :

$$2^{m} \geq 2,8 \quad 2^{q-1+\frac{n}{2}}$$

et en passant aux logarithmes :

$$m \geq \frac{n}{2} + q + 0,5 \qquad (4-4)$$

Exemple : pour n=10, q=8, on trouve $m \geq 13,5$.

On prendra m = 14

La constante de temps d'intégration est alors (2-2) :

$$T = \frac{2^{m-1}}{f_H}$$

Cette valeur est la constante de temps minimale, correspondant à la plus petite valeur possible pour m.

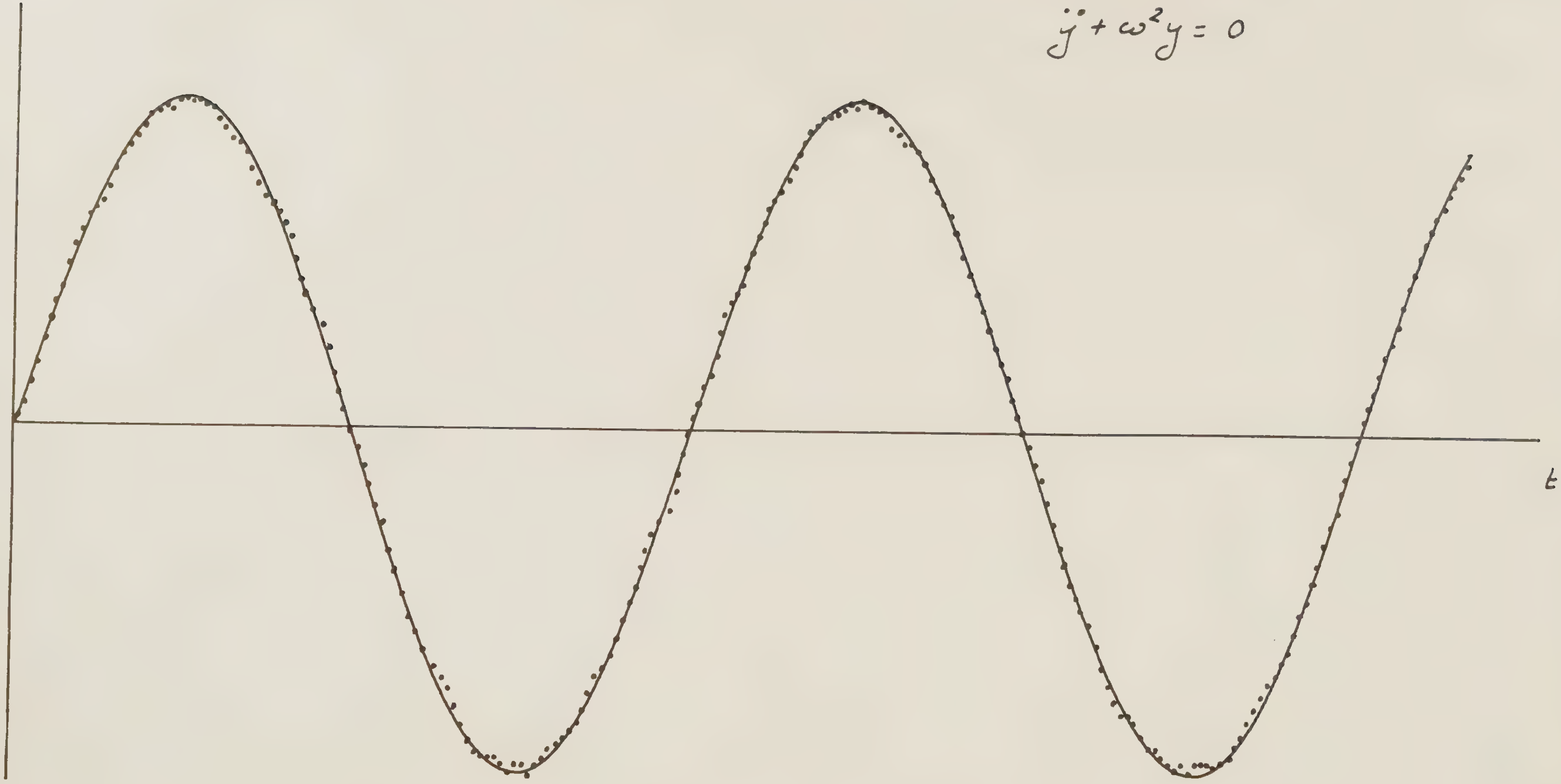
Pour f_H = 1 MHz, on trouve T_{min} = 8 ms.

Ces formules ne constituent bien entendu, qu'une approximation. Toutefois, l'accord entre la formule (4-4) et les résultats pratiques obtenus

fig 4.6

Resolution de

$$\ddot{y} + \omega^2 y = 0$$



fréquence du sinus : 8.10^{-5} x fréquence horloge

erreur max 3.10^{-2}

erreur quadratique moyenne $1,6.10^{-2}$

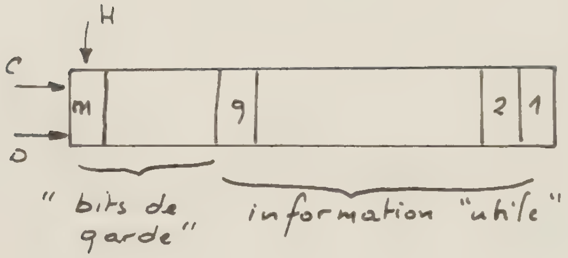


fig 4.5

Integrateur

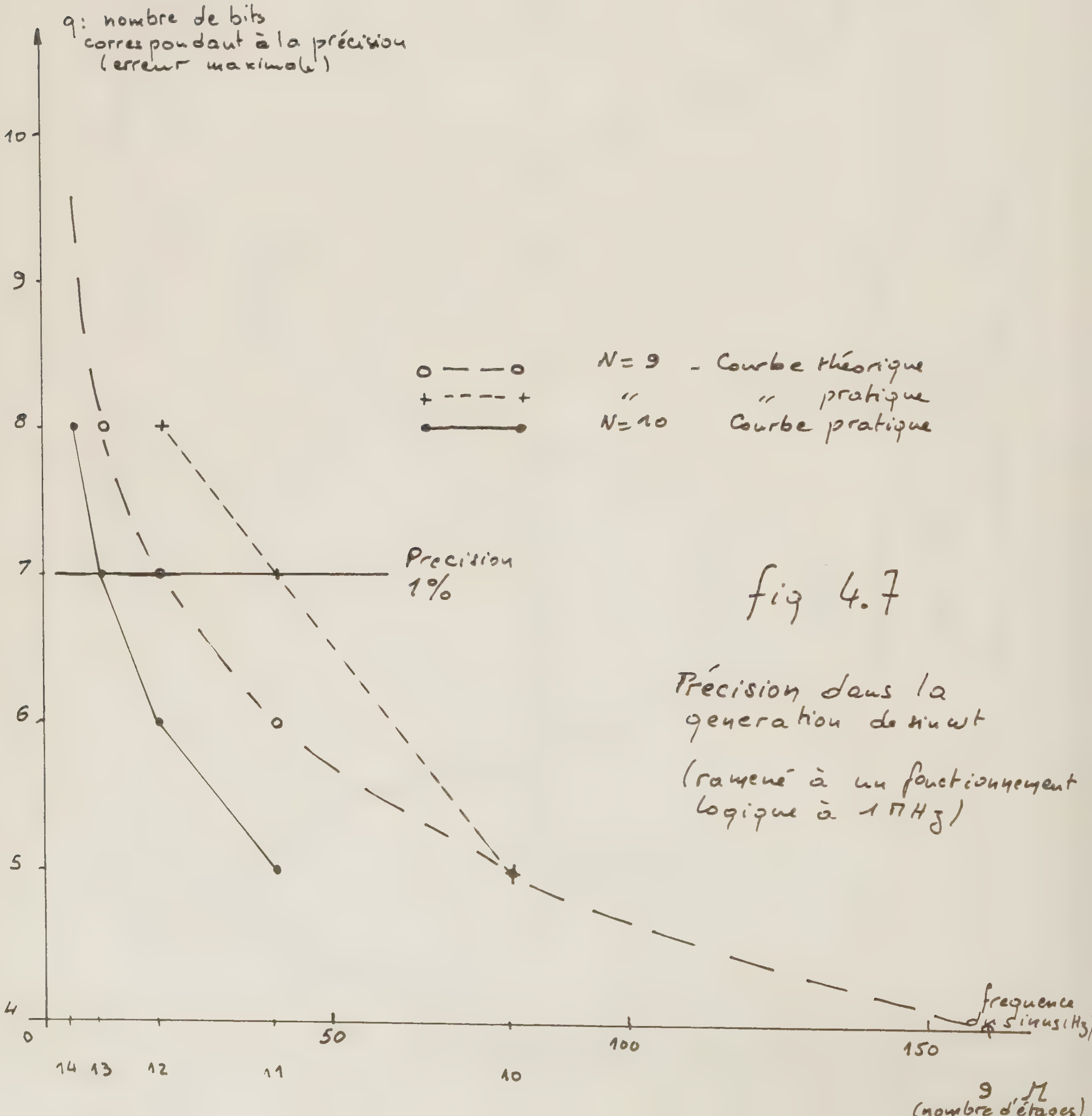


fig 4.7

Précision dans la generation de sin ωt

(ramené à un fonctionnement logique à 1 MHz)

montrent que cette formule est suffisante pour effectuer une prédétermination des performances. Une étude plus précise doit être obligatoirement faite par simulation.

Là encore, il n'est guère possible d'extrapoler le résultat au cas de n'importe quelle variation dans le temps. Toutefois, comme pour le filtrage, on peut voir que dans la mesure où la dynamique des signaux d'entrées est choisie de telle manière que l'intégrateur n'affaiblit pas complètement (à la précision près) les signaux, l'erreur reste toujours du même ordre de grandeur.

4.4. Etudes en simulation

Nous avons simulé la résolution de l'équation différentielle

$$y + \omega^2 \ddot{y} = 0$$

à l'aide de deux intégrateurs en représentation stochastique bouclés. L'organigramme de la simulation sur calculateur numérique est donné dans l'annexe "programmation".

Un exemple de courbe obtenue est donné fig. 4.6.
Dans ce cas particulier, nous avions :

$m = 10$

$n = 9$

$q = 5$ d'après (4-4)

L'erreur maximale observée (3.10^{-2}) est bien de l'ordre de 2^{-5}.

Un certain nombre de passages de ce programme, avec diverses valeurs de m, n et q ainsi que diverses valeurs du décalage entre les bruits servant au codage des intégrateurs ont été réalisés. Le décalage entre les bruits peut être quelconque puisqu'il n'y a pas de condition d'indépendance à réaliser. On constate que les résultats en matière de précision sont sensiblement indépendants de la valeur de ce décalage.

Les résultats obtenus sont reportés fig 4.7 et montrent l'accord entre les résultats expérimentaux et la formule (4-4).

Une autre étude en simulation a été faite pour la conception d'un module de traitement spécialisé multiplication-intégration-multiplication. Nous en présenterons les résultats dans le chapitre suivant, comparés à ceux relevés sur la maquette de ce module. Signalons simplement qu'une des conclusions de cette étude est que le passage d'une séquence au travers d'un opérateur algébrique (en particulier multiplieur) ne modifie pas sensiblement ses propriétés en matière de décodage. Les résultats précédents restent applicables.

En conclusion de ce chapitre, nous dirons que l'étude théorique de la précision dynamique est un problème très complexe, mais qu'on peut, moyennant certaines approximations, obtenir une bonne estimation des performances à l'aide de formules approchées donnant les erreurs maximales dans les deux cas de décodage que nous avons envisagées (filtrage passe-bas et lecture du contenu d'un intégrateur). Ces formules sont en accord suffisant avec les résultats pratiques pour que nous puissions les prendre pour base de départ de l'évaluation des performances lors de la conception de structures de calcul.

Etude et Réalisation d'un Module Multiplication - Intégration - Multiplication

La démarche que nous avons suivie jusqu'ici était une démarche d'analyse qui nous a permis de préciser les structures des codeurs, décodeurs et opérateurs ainsi que d'évaluer leurs performances. La seconde phase doit être l'approche de la synthèse d'organes de calcul. Nous allons voir, dans ce chapitre, la conception et la réalisation d'un module de traitement très simple. Cette étude a pour but d'aborder les problèmes de réalisation et de vérifier les divers résultats des chapitres précédents.

Le choix d'un module multiplication-intégration-multiplication comme première maquette réalisée au Département d'Automatique de la Direction des Recherches ALSTHOM répondait à un besoin. Ce besoin était de disposer d'opérateurs de ce type insérables dans un schéma de calcul analogique réalisant une identification en temps réel, (réf. C1), et ayant des performances particulières en matière de dérive et de stabilité.

La fonction multiplication-intégration, suivie ou non d'une seconde multiplication, se rencontre très fréquemment dans les problèmes d'identification en temps réel, ou on a généralement une mesure du type correlation à effectuer.

Le problème des schémas de calcul en temps réel à l'aide d'opérateurs analogiques est différent du problème du calcul analogique classique. Un calculateur analogique est bien adapté à la résolution d'un problème pendant un temps court avec une assez bonne précision, les problèmes de dérives n'ont ici qu'une faible importance. Par contre, dans le cas d'une identification en temps réel, le temps de calcul est très grand. En particulier, pour une mesure de corrélation où le temps de calcul est grand devant la constante de temps de l'intégrateur. Les problèmes de dérive sont ici prépondérants, la précision souhaitée du calcul ne dépasse pas en principe 1 %.

Le but de la réalisation en représentation stochastique a été de construire un module satisfaisant aux conditions suivantes :

-Précision 5 ‰ de la pleine échelle

-Constante de temps d'intégration T variable, entre une dizaine de millisecondes et plusieurs secondes.

-Entrées sorties analogiques - 10 V, + 10 V

-Aucune dérive de l'intégrateur pour une entrée du premier multiplieur nulle (ce qui était la condition non résolue avec des opérateurs analogiques conventionnels).

Le schéma analogique de l'opérateur est donné fig. 5.1., correspondant à l'équation (5-1) : $z(t) = x_3\ (t)\ \frac{1}{T} \int_o^t x_1\ (\tau)\ x_2\ (\tau)\ d\ \tau + y_o$

5.1. Description des diverses fonctions

On peut dégager les fonctions :

- codages analogiques-stochastiques de x_1, x_2, x_3
- codage numérique-stochastique de $y = \int_o^t x_1\ x_2\ d\ \tau$
- multiplication
- générateur du bruit
- conversion stochastique-analogique de z.

L'organisation de ces fonctions peut être représentée par le schéma de la fig. 5.2.

Pour réaliser les deux multiplications, nous avons une condition d'indépendance au niveau de chacune d'elles. On peut prendre, si τ est une valeur de décalage satisfaisant le critère d'indépendance du § 3.5. :

x_1	codé	avec	le bruit		$B(t)$
x_2	"	"	"		$B(t-\tau)$
x_3	"	"	"		$B(t-\tau)$
x_4	"	"	"		$B(t)$

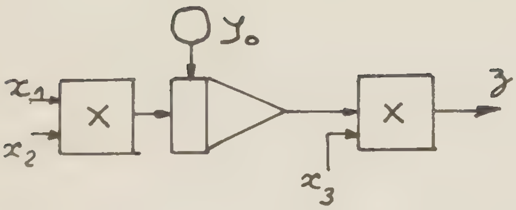


fig 5.1

Module multiplication-intégration-multiplication

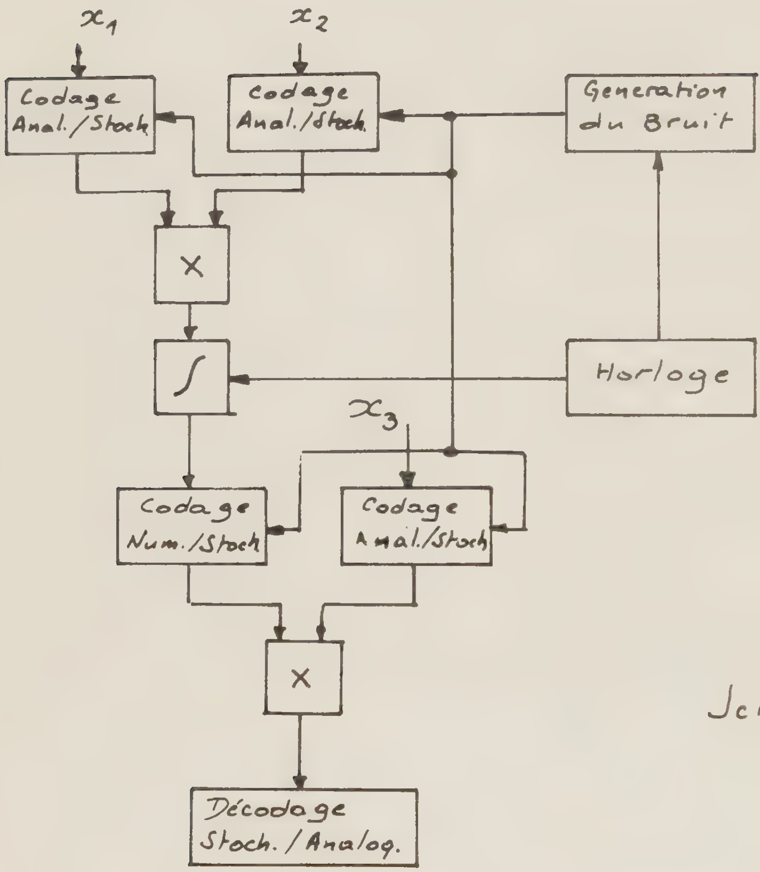


fig 5.2

Schéma synoptique

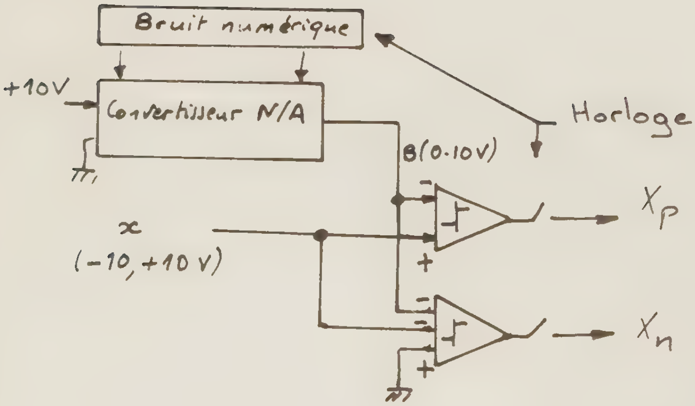


fig 5.3

Codage analogique-stochastique

Les deux conditions d'indépendance sur les deux multiplieurs peuvent en effet être traitées séparément puisqu'il n'y a pas de variable commune en représentation stochastique.

5.1.1. Génération de bruit et codages

Dans le domaine d'applications considéré, le problème des fluctuations autour de la valeur zéro a une grande importance, On choisira donc le codage en représentation bifilaire (cf chapitre 2).

La quantification au niveau du codage doit être déterminée à partir de la précision cherchée. Celle-ci est de $\pm 5.10^{-3}$ de la pleine échelle (-1,1) soit $\pm 10^{-2}$ en valeur absolue.
Considérons le cas du premier multiplieur :

$$\text{soit} \quad u = x_1 \cdot x_2 \tag{5-2}$$

Si h est le pas de quantification, x_1 et x_2 sont entachés d'erreurs Δx_1, Δx_2 inférieurs à $\frac{h}{2}$ en valeur absolue. D'autre part, u n'est défini qu'à h près (cf chapitre 3). L'erreur sur u est alors bornée en valeur absolue par :

$$\Delta u \geq \frac{h}{2} + \frac{h}{2} + h = 2h$$

D'où $h \leq 5.10^{-3}$, ce qui nous impose un codage en 8 bits sur la valeur absolue, soit 9 bits de la pleine échelle (8 bits + 1 bit de signe).

Il n'est pas possible d'estimer l'erreur introduite sur l'intégrale $\int_0^t u dt$ à partir de Δu dont nous ne connaissons qu'une borne.

Par suite, nous serons conduits à la détermination d'un intégrateur tel que le résultat de l'intégration soit défini avec la même précision que celle qui correspond à la quantification d'une entrée. La précision au niveau du second multiplieur est alors la même qu'au niveau du premier.

Le codage en 8 bits de la valeur absolue peut être réalisé à l'aide d'un registre pseudo-aléatoire dont le nombre d'étages est supérieur ou égal à 9. Sur la maquette réalisée, nous avons utilisé deux registres, à 9 et 10

étages, afin de comparer les résultats obtenus. Les valeurs du décalage τ réalisant la condition de pseudo-indépendance sont alors respectivement 23 et 15 (il s'agit dans les deux cas des plus petites valeurs extraites des tables de décalage correspondantes).

5.1.2. Intégrateur

L'intégrateur est constitué par le registre compteur-décompteur, présenté dans le paragraphe 1.2.

La constante de temps d'un tel intégrateur est :

$$T = \frac{2^{M-1}}{f_I}$$

où M est le nombre d'étages du registre intégrateur et f_I sa fréquence de comptage.

Pour obtenir une constante de temps variable, on peut agir soit sur M soit sur f_I. Toutefois, ces deux actions ne donnent pas le même résultat en matière de performances. Nous avons vu, dans le chapitre 4, que la précision d'un intégrateur est reliée à son nombre d'étages M, et ne dépend pas de f_I.

Afin de travailler à précision constante, il a paru préférable de garder M constant et de faire varier f_I.

En appliquant la formule (4-3), on obtient une indication sur la determination de M :

$$M \geq \frac{N}{2} + Q + 0,5$$

où Q est égal à 9 (il faut tenir compte du bit de signe).

Ceci nous donne, suivant le nombre d'étages N du registre pseudo-aléatoire

Pour N = 9 M = 14
N = 10 M = 15

En pratique, nous avons fait une étude expérimentale de la précision en fonction de M, compte tenu de l'approximation de la formule (4-3).

Ainsi qu'il a été vu dans le paragraphe 1.2., la fréquence f_I doit être un diviseur de la fréquence de travail du registre de bruit, sous réserve que le rapport de division soit premier avec la période pseudo-aléatoire. Dans ces conditions, tout revient à échantillonner l'entrée de l'intégrateur à une fréquence telle que cet échantillonnage restitue tous les termes de la séquence pseudo-aléatoire en modifiant simplement leur ordre, cette modification de l'ordre des termes dans la séquence n'introduit cependant pas de modification sensible de la statistique du 2ème ordre de la séquence.

La période pseudo-aléatoire, égale à $2^N -1$ si N est le nombre d'étages, est un nombre impair, toujours premier avec une puissance de 2. Par suite, il a été choisi des divisions par deux successives de l'horloge du générateur de bruit pour obtenir la constante de temps variable. Celle-ci varie donc en progression géométrique de raison 2, ce qui semble tout à fait suffisant pour répondre aux applications en calcul analogique.

5.2. Mise en oeuvre. Résultats obtenus

5.2.1. Codage analogique stochastique

Les entrées étant analogiques, il a été utilisé un convertisseur rapide numérique analogique pour transformer le bruit numérique issu du registre pseudo-aléatoire en une information analogique discrète en amplitude et dont les variations sont synchrones avec l'horloge H.

L'algorithme de codage analogique stochastique utilisé est celui de la comparaison, réalisé à l'aide de comparateurs analogiques.

Le schéma de principe du codage en représentation bifilaire symétrique présente l'inconvénient de nécessiter une détection de signe et une détection de valeur absolue, opérations relativement aisées en numérique mais plus délicats en analogique.

Aussi l'algorithme

$Xp = 1$ si $B < x$ et $x > o$

$Xn = 1$ si $B < x$ et $x < o$

a été remplacé par

$Xp = 1$ si $B < x$

$Xn = 1$ si $B < -x$, ou encore $B + x < o$ qui conduit au même résultat.

Le schéma fonctionnel correspondant est alors celui de la fig. 5.3.

Un problème subsiste au voisinage de x=o et B=o pour cette valeur, le résultat des comparaisons est indéterminé. Le résultat souhaité étant Xp=Xn=o si x est nul, on a "décalé" le zéro du bruit d'une tension ε la plus faible possible, compte tenu du pouvoir de résolution des comparateurs.

Au niveau du convertisseur numérique analogique, il existe une contrainte sévère de précision. En effet, le résultat de la comparaison doit être pris à un instant où la réponse du convertisseur est stabilisée à sa valeur finale et ceci avec une précision meilleure que la quantification utilisée. Cette contrainte doit être impérativement respectée si l'on veut conserver les propriétés statistiques du bruit issu du registre à décalage.

Le résultat de la comparaison est échantillonné. La valeur 0 ou 1 de la séquence est donc le résultat de la comparaison à l'instant d'échantillonnage.

Pour que cet instant d'échantillonnage ne soit pas pris durant le régime transitoire du convertisseur, on peut penser qu'il est nécessaire d'utiliser deux horloges entrelacées, l'une synchronisant le registre pseudo-aléatoire, l'autre l'échantillonnage après comparaison. Nous avons pu vérifier expérimentalement que ce dispositif n'est pas nécéssaire, compte tenu des temps de transition des divers éléments. On constate en effet que le régime transitoire du convertisseur ne commence qu'après un certain retard par rapport au top

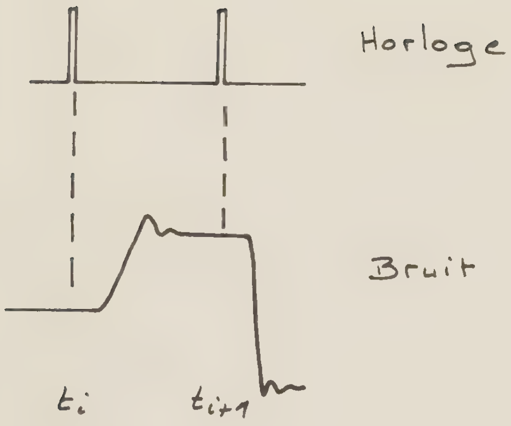


fig 5.4

Régime transitoire du bruit analogique

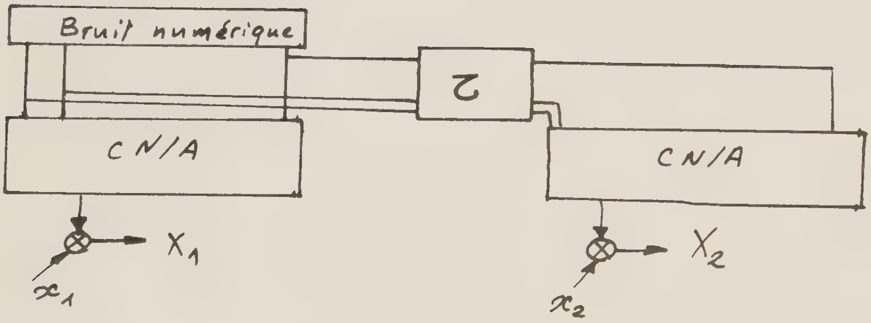


fig 5.5

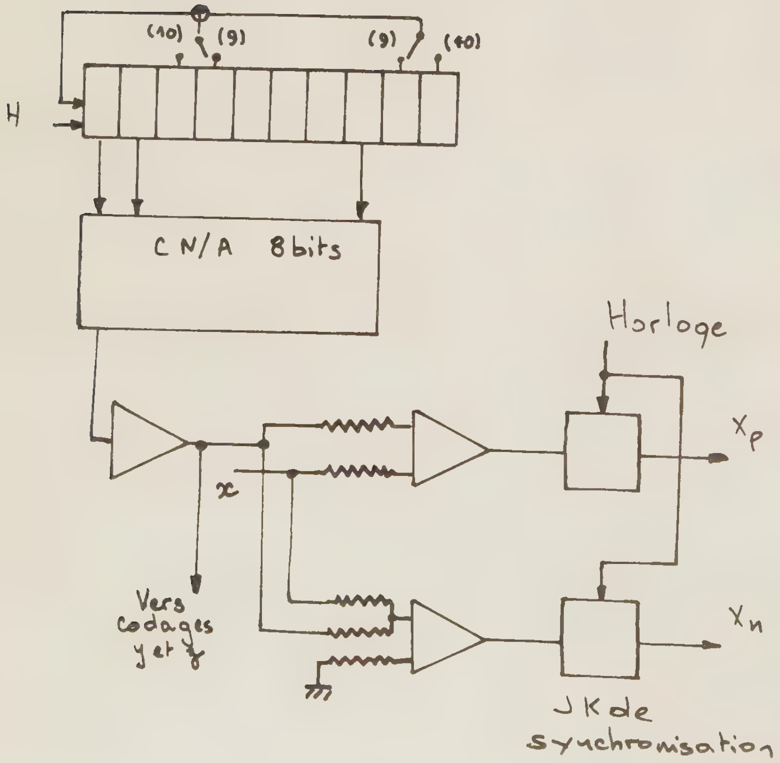


fig 5.6

d'horloge. L'échantillonnage est donc fait avec l'horloge du registre pseudo-aléatoire, le résultat pris à l'instant ti correspond à la valeur du bruit au temps ti -1 (fig. 5.4)

Un dernier point à examiner au niveau des codages analogique-stochastique est la réalisation des décalages.

En principe, il est nécessaire de décaler dans le temps le bruit servant à coder x_2 et x_3 d'une valeur $\tau\Delta t$. Cette solution nécessite donc deux convertisseurs numériques analogiques (voir fig. 5.5)

Compte tenu des contraintes sur le convertisseur numérique analogique, celui-ci est d'un prix relativement élevé par rapport à l'ensemble d'un module.

Il a donc été préféré une structure permettant de n'utiliser qu'une valeur du bruit : on réalise tous les codages avec la même version de bruit et on décale la séquence aléatoire de $\tau\Delta t$. Ceci introduit un retard sur l'information d'entrée, égal à $\tau\Delta t$. Nous allons voir que ce retard est suffisamment faible pour être négligé.

Sur le plan expérimental, le seul paramètre à déterminer dans l'étude du codage analogique-stochastique était la fréquence d'horloge maximale permettant un codage correct.

Cette fréquence maximale est déterminée en observant la réponse du convertisseur numérique analogique lors de sa variation de plus grande amplitude, et en vérifiant que cette réponse est bien stabilisée pendant un temps inférieur à une période d'horloge.

La fréquence limite de travail se situe vers 900 kHz avec le convertisseur utilisé. Nous avons utilisé une horloge dont la fréquence a été réglée autour de f_H = 819,2 kHz, cette valeur permettant d'obtenir des valeurs simples pour :

$$T = \frac{2M}{f_I} \qquad \text{où } M = 13 \qquad (2^{13} = 8192)$$

Le schéma de principe du circuit est donné fig. 5.6

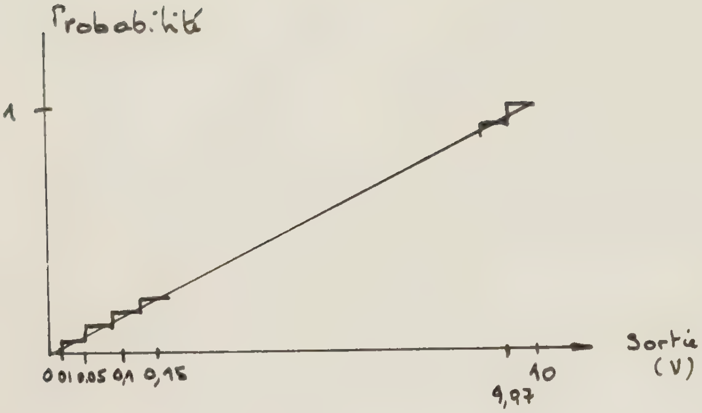


fig 5.7

Probabilité fonction de la tension d'entrée

registre à 10 étages

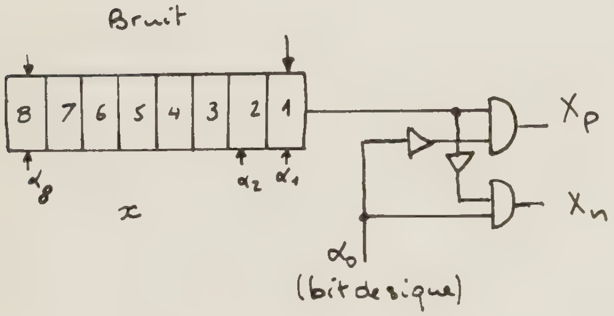


fig 5.8

Codage numérique stochastique

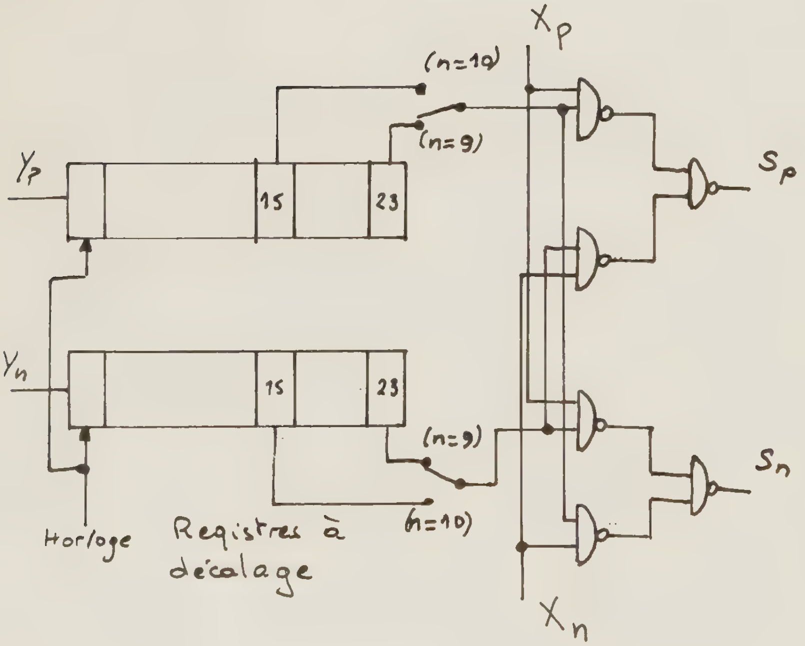


fig 5.9

Multiplication

La fig. 5.7 donne l'allure de l'évolution de la probabilité en fonction de la tension d'entrée, montrant l'effet de la quantification. La tension d'entrée varie entre -10V et +10V (ces tensions ont été choisies pour rendre compatible le module M.I.M. avec les modules analogiques dont nous disposions).

5.2.2. Codage numérique-stochastique

Le codage numérique-stochastique utilise le circuit d'un additionneur binaire (cf paragraphe 3.3.). Le codage du contenu de l'intégrateur (entre -1 et 1) a été pris en binaire complément à 2. Le schéma de conversion prend alors la forme donnée fig. 5.8.

En effet, si αo(bit de signe)$\alpha 1, \alpha 2, \ldots, \alpha Q$ sont les chiffres binaires de la représentation de x en code des compléments à 2, on a :

$$x = -\alpha o + \sum_{i=1}^{Q} \alpha i . 2^{-i}$$

d'autre part :

$$B = \sum_{j=1}^{Q} aj . 2^{-j}$$

Si R est la variable booléenne retenue de l'addition :

$$R = 1 \quad \text{si} \quad \sum_{1}^{Q} \alpha i \ 2^{-i} + \sum_{1}^{Q} aj . 2^{-j} \geq 1$$

ce qui correspond à :

$$P(R=1) = \sum_{1}^{Q} \alpha i . \ 2^{-i} \qquad (\text{cf § 3.5.})$$

et $\sum_{1}^{Q} \alpha i . 2^{-i} = x$ si x positif

$$\sum_{1}^{Q} \alpha i . 2^{-i} = 1 + x = 1 - |x| \quad \text{si } x \text{ négatif}$$

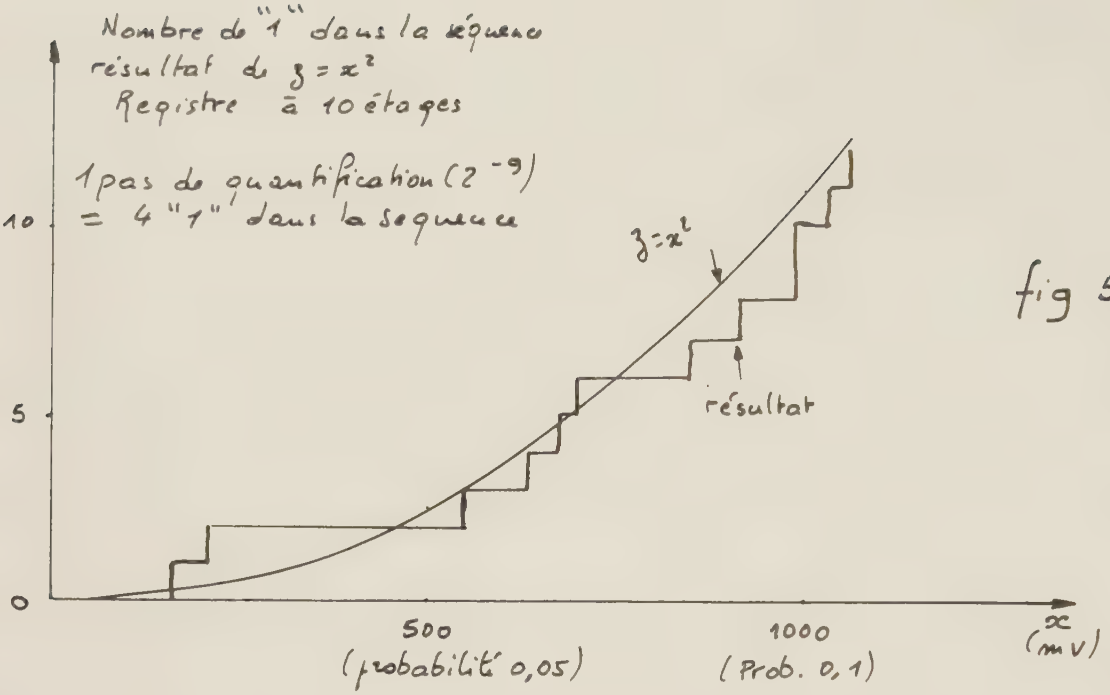


fig 5.10

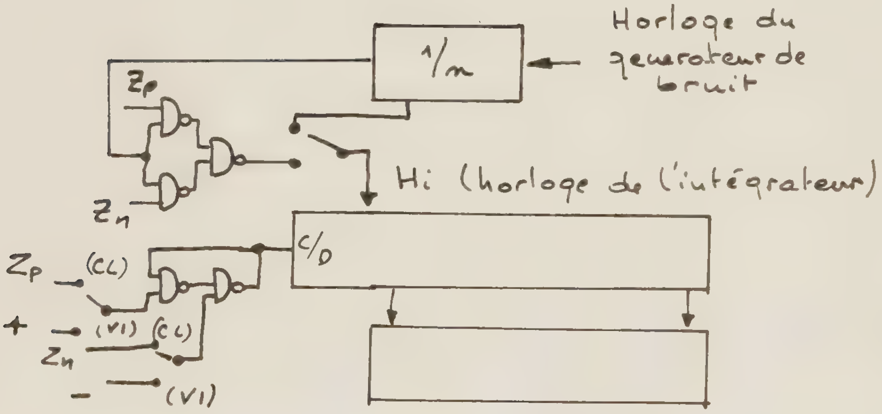


fig 5.11
Integrateur

(VI) : valeur initiale
(CL) : calcul

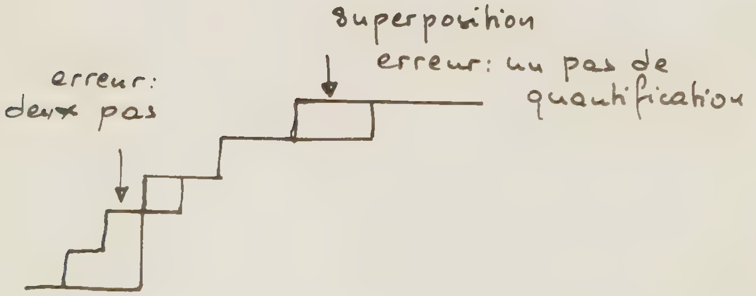


fig 5.12
Fluctuations de l'intégrateur

En prenant

$$Xn = \alpha o \ \overline{R}$$
$$Xp = \overline{\alpha o} \ R$$

On obtient bien

$$\left.\begin{array}{l} P(Xp=1) = |x| \\ P(Xn=1) = o \end{array}\right\} \quad x > o$$

$$\left.\begin{array}{l} P(Xp=1) = o \\ P(Xn=1) = |x| \end{array}\right\} \quad x < o$$

Nous avons d'autre part signalé l'équivalence de ce codage avec celui obtenu par une véritable comparaison ainsi que la compatibilité des deux algorithmes de codage en matière d'indépendance (§ 3.4.)

5.2.3. Multiplieur

Disposant des séquences (Xp,Xn) d'une part, (Yp,Yn) d'autre part, le circuit de multiplication est conforme à celui du paragraphe 1.2.

La fig. 5.9. montre le schéma de réalisation d'un multiplieur, avec les décalages permettant de réaliser la condition de pseudo-indépendance, pour les deux types de régistres pseudo-aléatoires (N=9 et 10) utilisés.

Ce circuit a permis de vérifier que l'erreur sur la probabilité du résultat est toujours bornée supérieurement par le pas de quantification, ce qui correspond à la condition de pseudo-indépendance.

A titre d'exemple, la fig. 5.10 montre le début de la parabole $z=x^2$ pour des faibles valeurs de x.

5.2.4. Intégrateur

La réalisation du circuit d'intégration est conforme au principe décrit au paragraphe 5.1.2. Il a été toutefois ajouté un circuit de blocage en cas de saturation afin d'éviter un basculement intempestif lorsque le

contenu de l'intégrateur sort de l'intervalle $-1,1$.

Afin de simplifier ces circuits, une modification du codage a été utilisée : les registres compteurs-décompteurs disposent d'une détection de saturation qui fonctionne pour les états

11 ... 1 et ordre de comptage
et 00 ... 0 et ordre de décomptage

puisque ces indications donnent un report sur le poids supérieur.

Nous avons donc été conduits à utiliser un code de complément à 2, mais où le bit de signe est complémenté

$\alpha o = 1$ si $x > o$
$\alpha o = o$ si $x < o$

Dans ces conditions à l'état

11 --	1	du compteur	correspond	l'information	de sortie	$1-\varepsilon$
10 .	0	"	"	"	"	o
01 .	1	"	"	"	"	$-\varepsilon$
00 ..	0	"	"	"	"	-1

On utilise alors la saturation à l'état 11 ..1 pour interdire le comptage et la saturation à l'état 00 0 pour interdire le décomptage.

Le schéma de principe de l'intégrateur est donné fig. 5.11.

Sur le plan expérimental, nous avons utilisé l'intégrateur pour mesurer les fluctuations stochastiques en régime dynamique.

Sur la maquette réalisée, l'horloge de comptage du compteur peut être prise en sortie de l'une des huit bascules du circuit de division, ce qui correspond aux échantillonnages possibles :

$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}; \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$ et $\frac{1}{256}$

Les constantes de temps correspondantes (avec M=13 et f_H = 819,2 KHz) sont

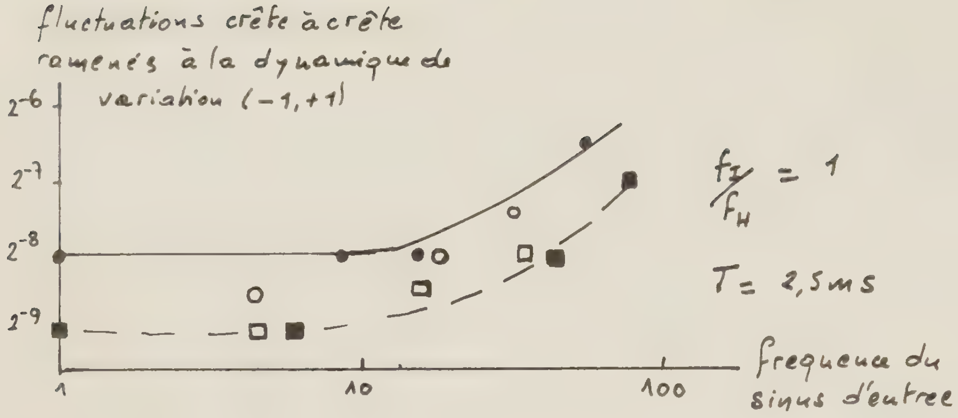


fig 5.13

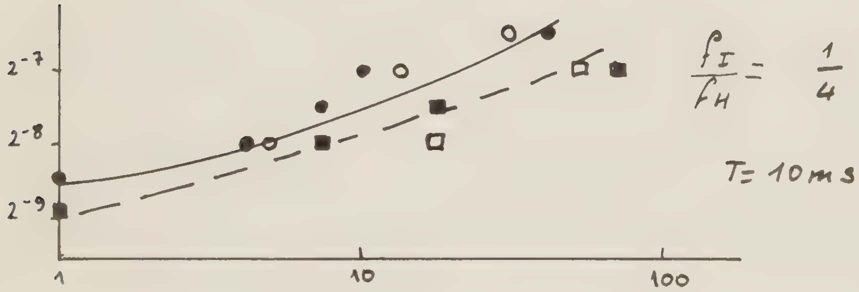


fig 5.14

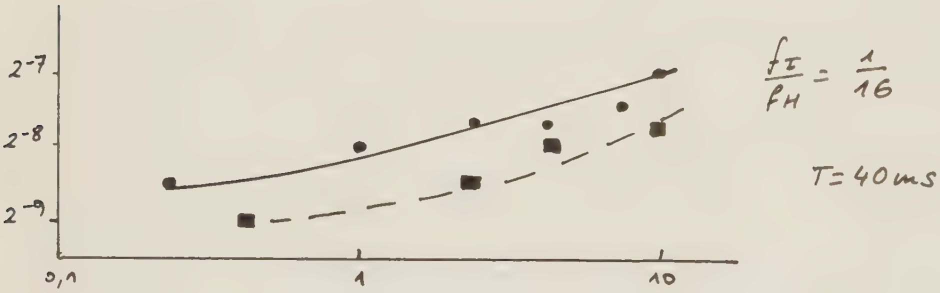


fig 5.15

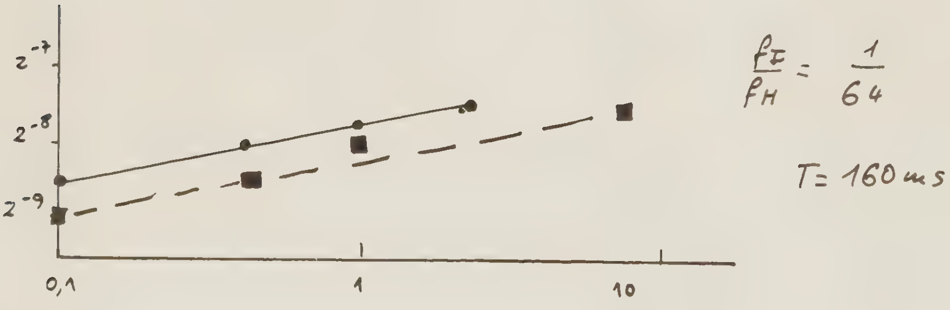


fig 5.16

Nombre d'étages de l'intégrateur : 12

—•—•— N = 10

o " résultats de simulation

—■– – ■ N = 9

□ " résultats de simulation

f_I : fréquence de l'intégrateur

f : fréquence du générateur de bruit

T : c^{te} de temps de l'intégrateur

10 ; 20 ; 40 ; 80 ; 160 ; 320 ; 640 millisecondes et 1,28 ; 2,56 secondes.

L'étude de la précision dynamique a été faite en régime simusoïdal (produit d'une constante par un sinus).

La mesure exacte de l'erreur instantanée est très délicate en régime variable. Toutefois, les programmes de simulations sur calculateur numérique de l'ensemble multiplication-intégration ont montré que l'erreur sur le résultat de l'intégration est en fait une erreur centrée, dûe uniquement aux fluctuations stochastiques.

Il est possible de visualiser ces fluctuations à l'aide d'un convertisseur numérique analogique rapide et d'un oscilloscope à mémoire. On peut alors estimer les fluctuations qui apparaissent par la superposition des courbes sur l'oscilloscope (sous réserve d'une bonne synchronisation). On trouvera un exemple de courbes obtenues fig. 5.12 , la mesure reste assez imprécise, en particulier à cause des problèmes de synchronisation. Il donne toutefois une estimation de l'erreur, dans la mesure où celle-ci est centrée.

Ces mesures ont été effectuées pour des intégrateurs de 12 et 14 étages et des registres pseudo-aléatoires de 9 et 10 étages, la fréquence de travail de l'intégrateur étant variable.

Les figures 5.13, 5.14, 5.15, 5.16 montrent que les résultats obtenus à l'aide de l'intégrateur à 12 étages pour quatre valeurs du rapport de division de la fréquence de travail de l'intégrateur à celle du générateur de bruit comparés aux résultats obtenus par simulation sur calculateur numérique. L'accord est satisfaisant.

Pour M=14, les fluctuations sont toujours très faibles et limitées à $\pm$ 1/2 bit de poids le plus faible, ceci pour les deux registres à 9 et 10 étages, à l'exception de certaines valeurs qui se situent à des fréquences du sinus d'entrée assez élevées. Il apparait dans un phénomène de "battement" entre la période du sinus d'entrée et la période pseudo-aléatoire.

On peut observer un tel battement par exemple, pour une fréquence d'entrée de 267 Hz l'intégrateur fonctionnant avec l'horloge du générateur de bruit (fréquence 819 KHz). La période pseudo-aléatoire est alors de 800 Hz donc très proche du triple de la fréquence du simus d'entrée.

Remarquons que pour une fréquence d'entrée de 267 Hz, le module de la réponse fréquentielle de l'intégrateur est de 2.10^{-2} (constante de temps 10 ms), le signal utile en sortie est donc très faible et on peut considérer que cette valeur de la fréquence d'entrée sort de la gamme d'utilisation de l'appareil.

D'autre part, le système est non linéaire et un signal dont le spectre s'étend au delà des valeurs critiques des fréquences d'entrée ne donne pas lieu en sortie à des phénomènes de battement analogue à ceux observés en régime simusoïdal.

Au niveau de l'intégrateur, nous avons ajouté un circuit d'initialisation, qui utilise un signale de comptage (+) ou décomptage (-) permettant de faire évoluer l'état du compteur vers celui désiré (voir fig. 5.11).

5.2.5. Décodage : circuit de sortie

Le circuit utilisé est dérivé du paragraphe 1.3. Son schéma de principe est donné fig 5.17.

Ce circuit transforme le signal bifilaire (Sp-Sn) en un signal ternaire

10V si Sp=1
-10V si Sn=1
0 si Sp+Sn=o

La valeur moyenne de ce signal est alors égale à 10Vx (probabilité (Sp=1) - probabilité (Sn=1)).

Les quatres interrupteurs ont été réalisés avec des transistors à effet de champ en technologie M.O.S. Le schéma correspondant est donné fig. 5.18.

Ce type de circuit est limité en précision, en particulier à cause de la dispersion des valeurs des résistances de conduction des transistors à effet de champ. Une étude de ce problème a été donnée dans A7.

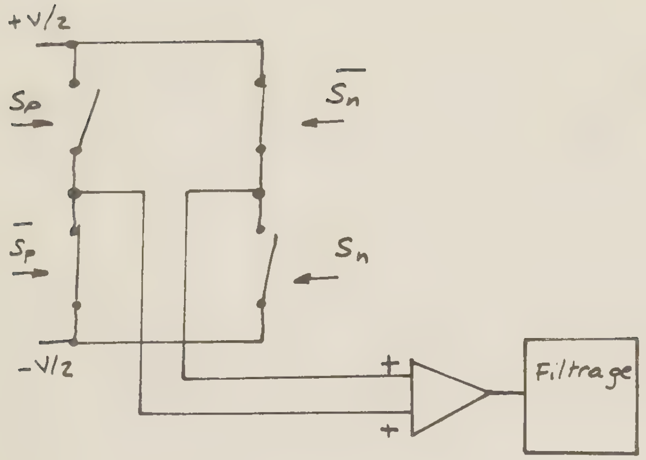


fig 5.17

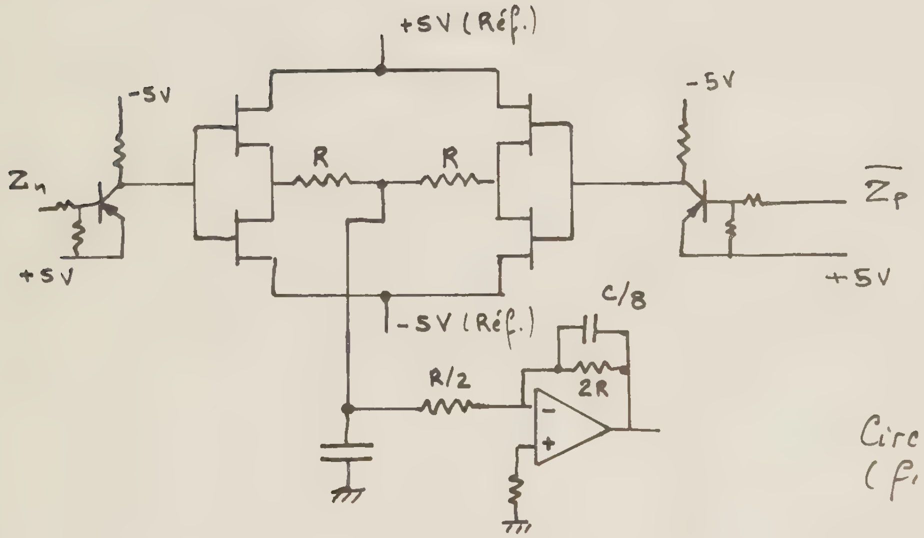


fig 5.18

Circuit de sortie (filtrage du 2^{e} ordre)

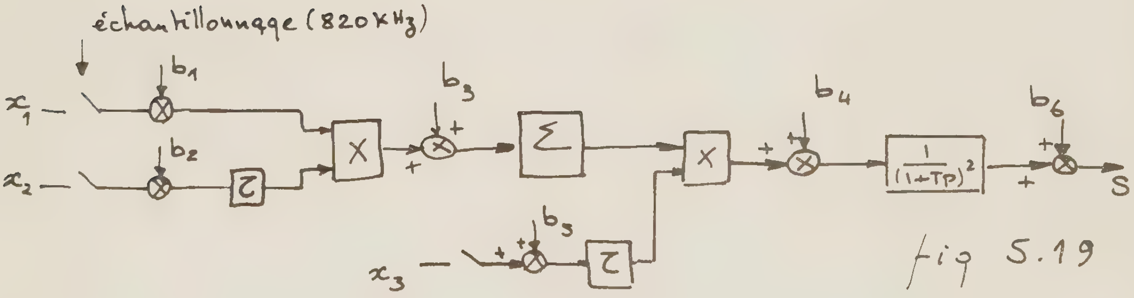


fig 5.19

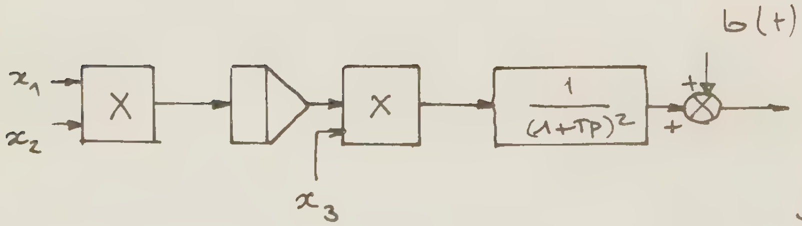


fig 5.20

Schéma équivalent du M.I.M.

Nous avons relevé l'erreur de linéarité du circuit en fonction de la valeur moyenne des séquences aléatoires (voir fig. 5.1). L'erreur maximale obtenue est de 9 mv, soit meilleure que 5.10^{-4} de la pleine échelle (20V), ce qui est un résultat très satisfaisant.

L'élaboration de la valeur moyenne est faite par un filtrage analogique du signal ternaire (-10,0,+10V).

Nous nous sommes limités à un filtrage par circuit R-C du premier et du second ordre et, dans ces deux cas, nous avons déterminé expérimentalement le filtre pour avoir un niveau maximum de fluctuations crête à crête égal à un pas de quantification, soit 40 mV.

Nous avons pris pour filtre du premier ordre un filtre de fonction de transfert $\frac{1}{1+T_{1p}}$ et pour filtre du second ordre un filtre $\frac{1}{(1+T_{2p})^{2}}$

Dans ces conditions, on trouve :

filtre 1er ordre T_1 = 25 ms
filtre 2è ordre T_2 = 1,3 ms

Le critère de performances choisi ayant été la meilleure bande passante à 1% on obtient :

filtre 1er ordre B.P. à 1% : 4Hz
filtre 2è ordre B.P. à 1% : 10 Hz

5.3. Caractéristiques du M.I.M.

A partir des résultats précédents, nous avons fixé les paramètres

. nombre d'étages intégrateur 14
. " " registre de bruit 10
. filtrage du deuxième ordre $\frac{1}{(1+\tau p)^2}$ avec τ=1,3 ms

La valeur de 10 pour le nombre d'étages de l'intégrateur a été choisie plutôt que 9 car elle conduit à une valeur de décalage plus faible (15 au lieu de 23 impulsions d'horloge) tout en donnant des résultats comparables sur le plan de la précision.

On peut donner, en vue des applications, un schéma équivalent du module. Compte tenu des diverses causes d'erreur, ce schéma équivalent prend la forme de la fig. 5.19.

Dans ce schéma, b1,b2,b5 sont les "bruits de quantification" b3,b4 sont les erreurs au niveau des multiplications, b6 représente les fluctuations stochastiques au décodage.
τ est le retard apporté sur les voies x2 et x3 (15 impulsions d'horloge). Pour une fréquence de travail de 819,2 KHz, τ=18,3µs.

Ce retard introduit une erreur de phase de 1° pour un signal simusoïdal à 150 Hz, donc en dehors de la bande de fréquence où le module est utilisable. Nous négligerons donc les deux retards ainsi que l'échantillonnage à 819,2 KHz qui est très rapide devant la dynamique des signaux traités.

Enfin, on peut en première approximation car le système est non linéaire, ramener tous les bruits et erreurs en sortie, pour aboutir au schéma équivalent approximatif de la fig. 5.20.

On peut estimer que les erreurs de quantification et les fluctuations de décodage sont centrées. D'autre part, l'erreur d'échantillonnage peut être supposée non correlée avec la sortie. Il n'en est pas de même pour les erreurs au niveau des multiplications. Par suite, il n'est pas possible de déterminer correctement la statistique du "bruit" de sortie b(t).

Sous les hypothèses déjà énoncées sur la précision, nous dirons que b(t) est approximativement centré (expérimentalement ce résultat semble justifié) et borné en valeur absolue par $\varepsilon1+\varepsilon2$, où :

$\varepsilon1$: erreur au niveau du deuxième multiplieur en tenant compte des quantifications : $\varepsilon1 < 2.2^{-8} = 2^{-7}$

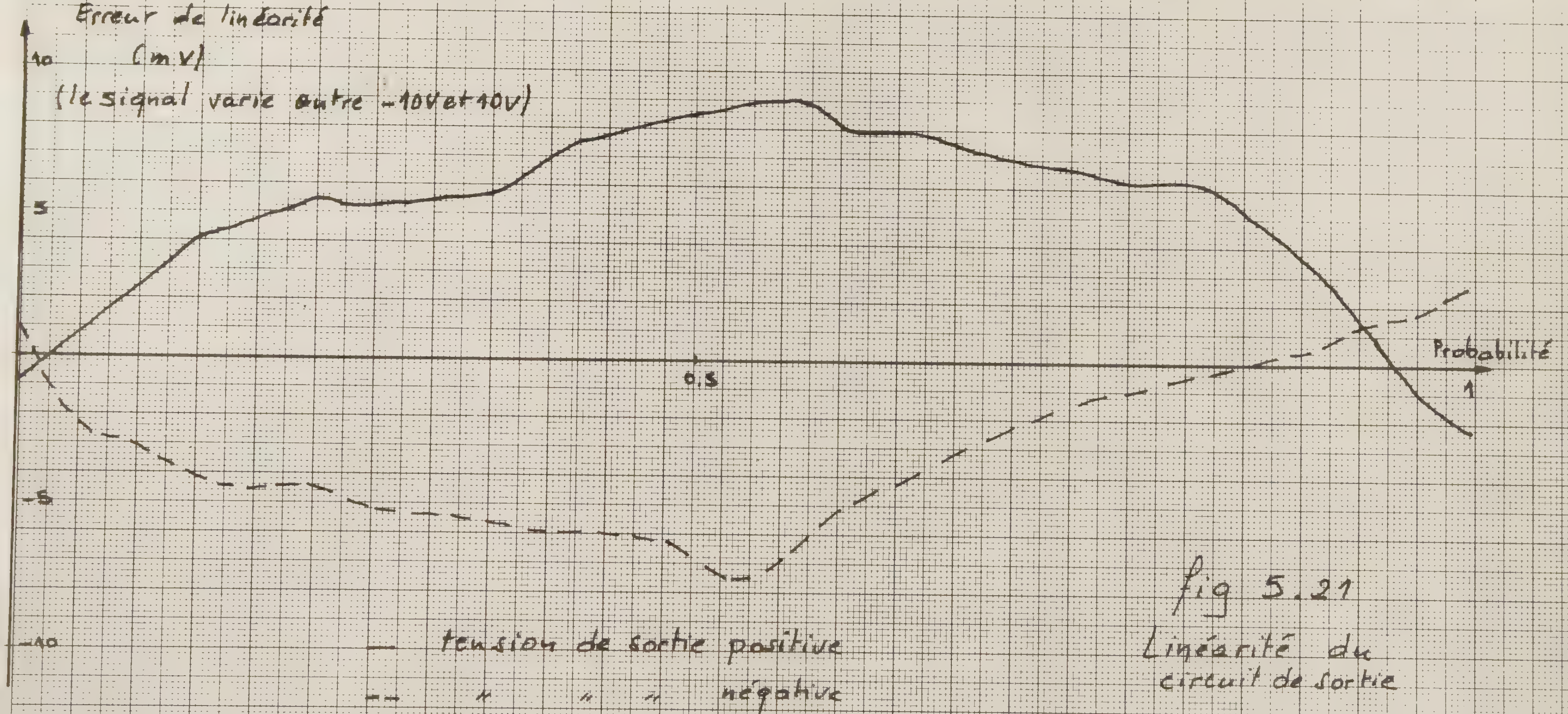


fig 5.21

Linéarité du circuit de sortie

$\varepsilon 2$: fluctuations du décodage $\varepsilon 2 < 2^{-9}$

b(t) est donc borné en valeur absolue par

$$10\ (2^{-7}+2^{-9}) \qquad 0,1\ V$$

soit 5.10^{-3} de la pleine échelle (20V).

Ce résultat est tout à fait conforme aux mesures réalisées.

Enfin, compte tenu du filtre $\frac{1}{(1+Tp)2}$ de sortie, la bande passante à 1% est d'environ 10Hz.

En conclusion de ce chapitre, nous noterons que l'accord entre les résultats théoriques des chapitres précédents et les mesures effectuées sur la maquette du M.I.M. est satisfaisant.

D'autre part, ainsi qu'il était prévisible, le schéma de réalisation est assez simple, au moins en ce qui concerne les circuits logiques.

Pour la partie analogique, il a été possible d'obtenir de bons résultats du circuit de sortie (décodage stochastique-analogique) sans recourir à une structure trop complexe. Par contre, le circuit de conversion analogique stochastique requiert la présence d'un convertisseur numérique-analogique rapide, ce qui ne paraît pas être une solution très satisfaisante : son coût est de l'ordre du tiers du coût total des composants de la maquette.

Nous noterons que le codage d'une entrée numérique est beaucoup plus simple que celui d'une entrée analogique. Nous reviendrons sur ce point dans le chapitre 6.

Applications a la Conception de Structures de Calcul Utilisant la Représentation Stochastique

Dans ce chapitre, nous allons essayer de dégager, à la lumière des résultats des chapitres précédents, quelques idées qui peuvent orienter la conception de structures de calcul utilisant la représentation stochastique.

Les propriétés originales de la représentation stochastique entraînent une organisation du calcul adaptée. En particulier, le principal intérêt des opérateurs en représentation stochastique est leur simplicité technologique. A notre connaissance, aucun type de représentation de l'information ne permet la conception d'opérateurs algébriques plus simples ; toutefois la mise en oeuvre de ces opérateurs nécéssite un certain nombre de précautions (problèmes d'indépendance stochastique des séquences).

Nous distinguerons deux cas, selon la taille du calculateur envisagé. Le premier concerne la résolution de problèmes complexes. Nous allons voir que la représentation stochastique peut permettre la résolution de tels problèmes, à l'aide de structures modulaires spécialisées. Le second cas, correspond aux problèmes de faible complexité, voisine ou peu supérieure à celle du module M.I.M. étudié au chapitre 5. La représentation stochastique peut ici permettre la conception de microcalculateurs résolvant une tâche particulière, associés éventuellement à un ensemble de calcul analogique (cas du M.I.M.), à un ensemble de calcul numérique (périphérique spécialisé) ou réalisant seuls une fonction simple (cas fréquent en aéronautique ou dans certains problèmes industriels).

6.1. Découpage d'un problème complexe

Dans le cas d'une structure de calcul complexe, l'un des premiers problèmes à résoudre est celui du nombre de séquences indépendantes. Nous avons vu l'intérêt des séquences pseudo-aléatoires à courte période en matière de précision. Ce point, particulièrement important doit à notre avis conditionner

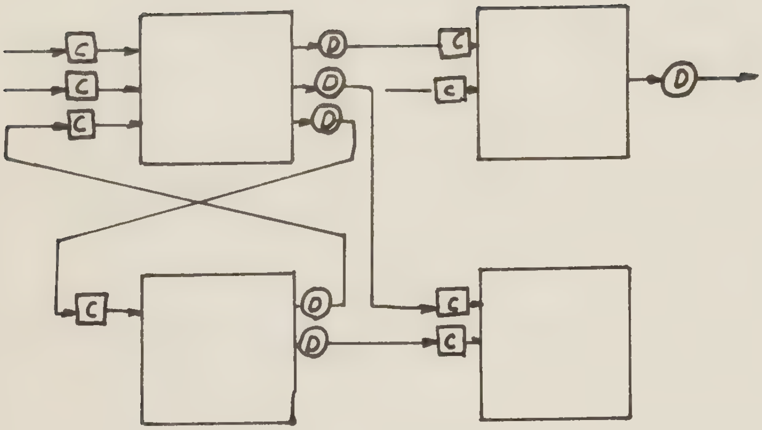


fig 6.1

Structure modulaire

[C] organe de codage

(D) organe de décodage

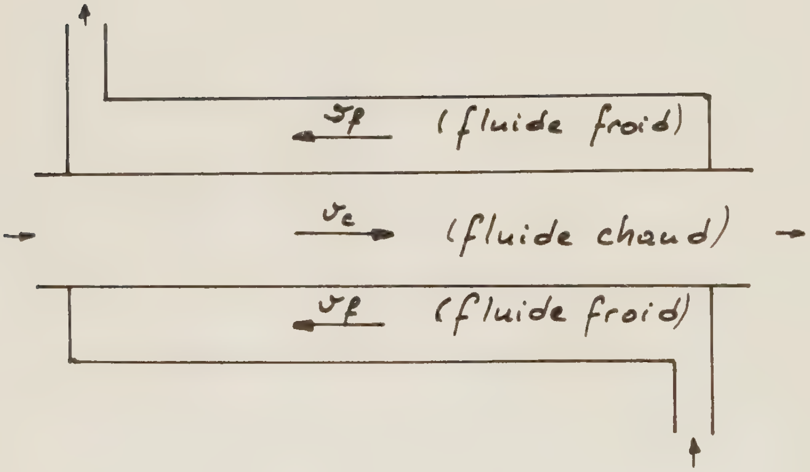


fig 6.2

Echangeur thermique

temperatures d'entree fluide froid θ_{fe}
chaud θ_{ce}
de sortie fluide froid θ_{fs}
chaud θ_{cs}

toute étude d'un calculateur en représentation stochastique. L'inconvénient de telles séquences est que le nombre de variables traitées doit rester faible pour conserver une période pseudo-aléatoire courte (cf chapitre 3).

Il devient donc nécessaire, pour concilier ce point et le grand nombre de variables à traiter dans un problème complexe, de procéder à un découpage du problème à résoudre. Ce découpage doit être tel qu'on obtienne un certain nombre de sous problèmes à nombre de variables d'entrée suffisamment faible et dont les entrées et sorties soient compatibles sur le plan de l'indépendance des séquences avec les entrées et sorties des autres sous problèmes. La solution la plus simple pour obtenir cette compatibilité est que les entrées et sorties ne soient pas en représentation stochastique ! Dans ce cas en effet, nous allons aboutir à un réseau de cellules interconnectées, où, à l'intérieur de chaque cellule s'effectue un traitement en représentation stochastique, mais où les entrées et sorties sont analogiques ou numériques. On aboutit à un réseau du type donné (fig. 6.1).

L'inconvénient d'une telle structure est, bien entendu, l'accumulation d'organes de codage et de décodage qui n'ont aucune fonction de calcul ni même de dialogue avec l'extérieur du calculateur mais simplement un rôle "d'isolement" vis à vis des conditions d'indépendance. Ces organes peuvent de plus introduire des erreurs dynamiques non négligeables.

Les avantages restent ceux de la représentation stochastique, c'est-à-dire le traitement parallèle des informations, le faible nombre de circuits logiques nécessaires pour réaliser le traitement d'informations.

Afin de ne pas perdre ce dernier avantage de simplicité, nous avons été amenés à rechercher des types de problèmes ou le découpage en sous problème permettrait de réduire au strict nécessaire le nombre d'organes de codage et décodage au niveau de chaque cellule. Nous avons vu, en effet le rôle privilégié de l'intégrateur en représentation stochastique qui est un opérateur à entrée stochastique et à sortie numérique, qui réalise donc toujours le rôle d'un organe de décodage. On peut donc voir que le cas d'un problème donnant lieu à la

construction de cellules dont les sorties sont constituées par des intégrateurs est particulièrement bien adapté à la conception pseudo-aléatoire à période courte. Ce type de problème va en effet conduire directement à un schéma analogue au précédent et sans imposer l'introduction d'organes supplémentaires.

Les résolutions de systèmes différentiels entrent bien entendu dans ce cas : chaque ligne d'un système sera résolue par une cellule, l'interconnection de ces cellules permettra de résoudre le système complet.

Nous allons étudier un exemple, qui est celui de la résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles qui peut se ramener pratiquement à celle d'un système différentiel complexe.

6.2. Etude d'un exemple : système d'équations aux dérivées partielles

Ce problème nous a été soumis par GILLES (C2), il concerne la simulation d'un échangeur thermique à contre courant. Aucune réalisation n'a été faite pour le moment à l'aide de la représentation stochastique, mais il nous paraît intéressant de l'utiliser pour exposer la méthode de synthèse d'un circuit de calcul.

Considérons un échangeur thermique à contre courant (fig. 6.2.). Son comportement dynamique est régi par le système d'équations aux dérivées partielles (modèle ne tenant pas compte des échanges longitudinaux)

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial \theta c}{\partial t} + v_c \frac{\partial \theta c}{\partial x} + k_{pc} (\theta c - \theta p) = o \\
&\frac{\partial \theta t}{\partial t} - v_f \frac{\partial \theta f}{\partial x} + k_{pf} (\theta f - \theta e) + hfe\, (\theta f - \theta e) = o \qquad (6\text{-}1) \\
&\frac{\partial \theta p}{\partial t} + k_{pc} (\theta p - \theta c) + k_{pf} (\theta p - \theta f) = o \\
&\frac{\partial \theta e}{\partial t} + hcf\, (\theta e - \theta f) = o
\end{aligned}
$$

avec :

indice c : fluide chaud
" f : " froid
" p : paroi de séparation
" e : enveloppe extérieure

θce : température d'entrée fluide chaud
θcs : " de sortie " "
θfe : " d'entrée " froid
" : " de sortie " "
h : coefficient d'échange par convection
k : coefficient d'échange avec la paroi

La méthode utilisée (C3) est similaire à une méthode classique en calcul analogique et consiste en la discrétisation des variables spatiales (ici une seule). La discrétisation suivant x en M éléments conduit à un système de 4M équations différentielles en t ; à l'intérieur d'un élément (x_i, x_i+1), la dérivée partielle $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ est approchée par :

$$\frac{\theta(xi)-\theta(xi-1)}{\Delta x} \qquad \text{avec} \quad \Delta x = xi+1-xi$$

Il s'agit donc d'une approximation au premier ordre. L'étude de la convergence de ce type de méthode est relativement classique (C4). Le système obtenu après discrétisation a la forme :

$$\frac{d\theta c(xi)}{dt} + \frac{vc}{\Delta x}\left[\theta c(x_i)-\theta(x_{i-1})\right] + kep\left[\theta c(xi)-\theta p(xi)\right] = o$$

) $$\frac{d\theta f(xi)}{dt} - \frac{vf}{\Delta x}\left[\theta t(x_i)-\theta f(xi-1)\right] + kpf\left[\theta f(xi)-\theta p(xi)\right] + hfe\left[\theta f(xi)-\theta e(xi)\right] = o$$

$$\frac{d\theta p(xi)}{dt} + kpc\left[\theta p(xi)-\theta c(xi)\right] + kpf\left[\theta p(xi)-\theta f(xi)\right] = o$$

$$\frac{d\theta e}{dt} + hep\left[\theta e(xi)-\theta f(xi)\right] = o$$

i=1,2,...M

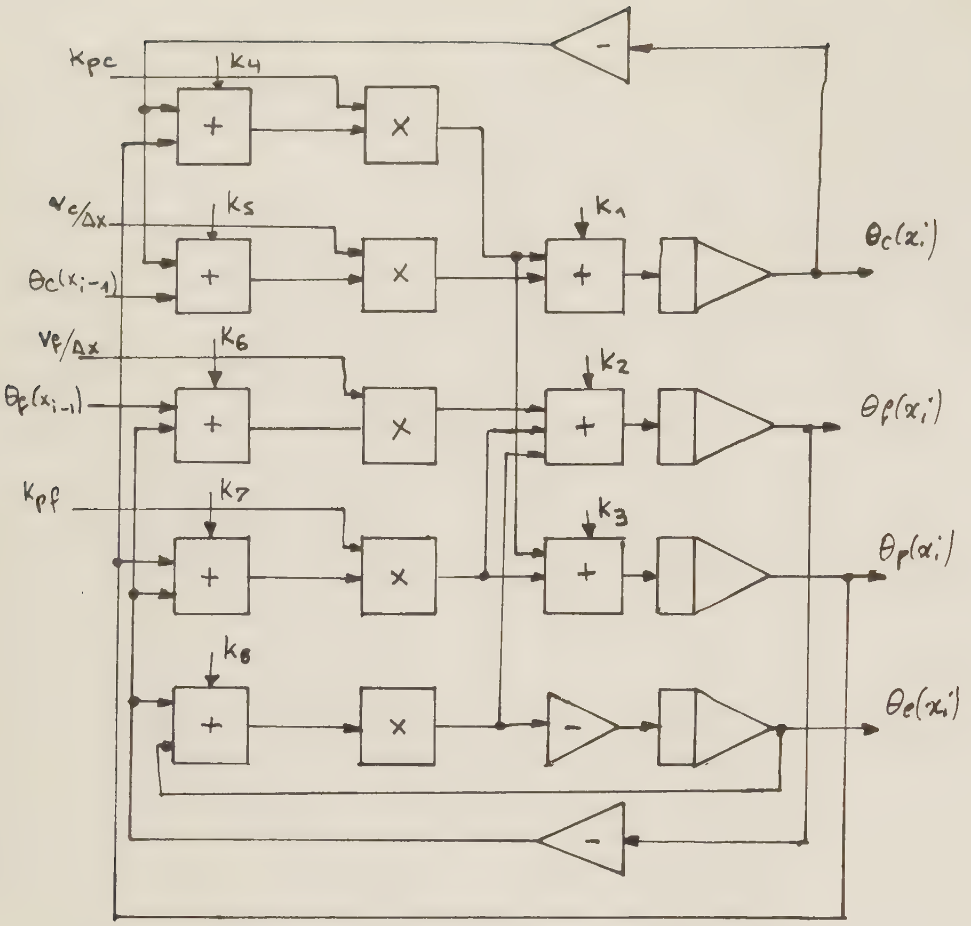


fig 6.3 . Cellule

fig 6.4

Table des incompatibilités

	Kpc	$\frac{V_c}{\Delta x}$	$\frac{V_f}{\Delta x}$	Kpf	hfe	θc_i	θc_{i-1}	θf_i	θf_{i-1}	θp	θe	K_1	K_2	K_3	K_4	K_5	K_6	K_7
$\frac{V_c}{\Delta x}$																		
$\frac{V_f}{\Delta x}$																		
Kpf																		
hfe																		
θc_i	X	X																
θc_{i-1}		X																
θf_i			X	X	X													
θf_{i-1}			X															
θp	X			X														
θe					X													
K_1	X	X				X	X			X								
K_2			X	X	X			X	X	X	X							
K_3	X			X		X		X	X	X								
K_4	X					X				X		X		X				
K_5		X				X	X					X						
K_6			X					X	X				X					
K_7				X				X		X			X	X				
K_8					X			X			X		X					

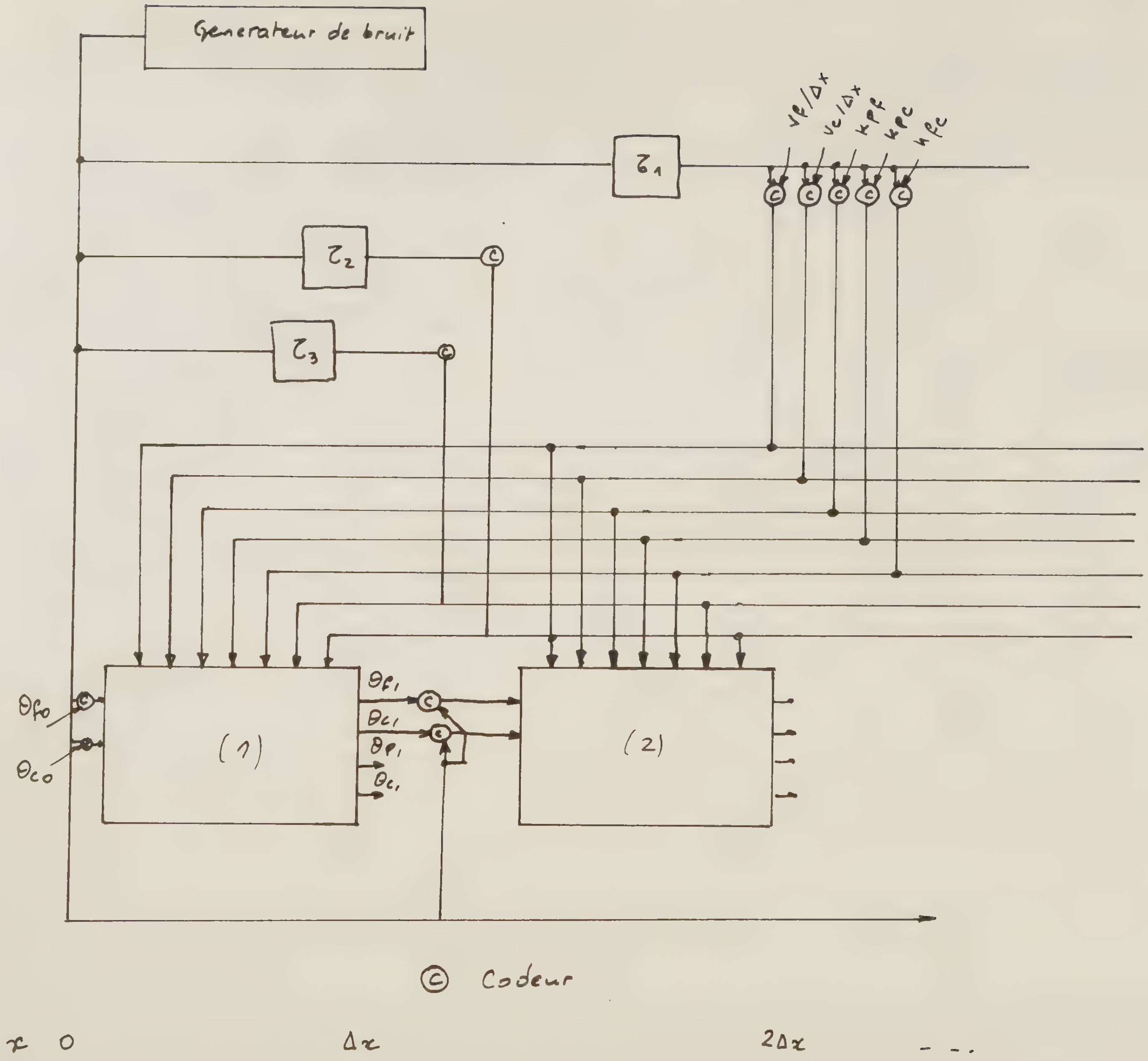


fig 6.5

Résolution du système

et conduit au schéma de la fig. 6.3 : ce schéma représente une cellule, dont les entrées sont k_{cp} , $\upsilon f/\Delta x$, $\upsilon c/\Delta x$, kpf, hfe.

$\theta c(xi)$, $\theta f(xi)$, $\theta p(xi)$, $\theta e(xi)$ qui sont en même temps sortis de la cellule

$\theta c(xi-1)$, $\theta f(xi-1)$ qui sont des sorties de la cellule précédente.
Enfin, à l'intérieur de la cellule, on introduit les séquences k1, k2, k3, k4, k5, k6, k7 et k8 de probabilités 1/2 pour réaliser les additions.

On peut vérifier qu'en codant $\theta c(xi)$, $\theta c(xi-1)$, $\theta f(xi)$, $\theta f(xi-1)$, $\theta p(xi)$, $\theta e(xi)$ avec le bruit B(t) ; $\upsilon f/\Delta x$, $\upsilon c/\Delta x$, kcp, kpf, hfe avec le bruit $B(t-\tau_1)$; k1, k2, k3 avec le bruit $B(t-\tau_2)$ et enfin, k4, k5, k6, k7 et k8 avec $B(t-\tau_3)$ où $\tau_1 \tau_2 \tau_3$ appartiennent à une table du paragraphe 3.5., les conditions d'indépendance sont remplies. On peut construire en particulier le tableau des compatibilités (voir fig. 6.4), le problème est le même que celui rencontré lors de la fusion des lignes pour la synthèse d'un système séquentiel.

On aboutit alors à un schéma complet de résolution du système (6-1) représenté fig. 6.5. (cas où les coefficients kpc, kpf, hfe sont constants).

Il faut remarquer le faible nombre de versions de bruit différents nécessaires aux codages, qui va donc permettre d'utiliser une période pseudo-aléatoire courte. Bien entendu, l'introduction de non stationnarité sur les coefficients d'échange thermique imposerait la présence d'un bloc de calcul de ces coefficients associé à chaque cellule ; le nombre de versions de bruit augmenterait alors. Toutefois, cet exemple permet de bien voir que le nombre de versions de bruit n'est pas nécessairement égal au nombre de variable d'entrées d'une cellule et, par conséquent, chaque cellule peut avoir une structure relativement complexe sans que la période pseudo-aléatoire doive être très grande.

6.3. Perspectives en matière de calculateurs en représentation stochastique

Nous venons de voir, sur un cas particulier, comment on peut concevoir une structure modulaire de calculateur, où la résolution d'un problème complexe est obtenue à l'aide d'un réseau de modules interconnectés. Ces modules bénéficient des avantages de la représentation stochastique en matière de simplicité

des opérateurs et peuvent être conçus de manière à utiliser des séquences pseudo-aléatoires à période courte, conservant donc des performances précision-vitesse acceptables.

L'application à la résolution d'équations aux dérivées partielles n'est qu'un exemple particulier, mais il permet de dégager les principales caractéristiques d'un calculateur : conception modulaire où chaque module spécialisé effectue une tâche particulière et est relié aux autres modules, permettant un traitement parallèle.

Cette conception modulaire a été introduite pour obtenir le meilleur compromis précision-vitesse possible. Ce résultat intéressant ne doit pas faire oublier le premier objectif de l'emploi de la représentation stochastique, qui était de réaliser des structures de calcul économiques.

Sur le plan des coûts, la représentation stochastique de l'information bénéficie d'un gros avantage par rapport à tous les autres modes de représentation : la très grande simplicité des opérateurs. Pour utiliser cet avantage, il importe de compliquer le moins possible le schéma de principe d'un circuit de calcul. C'est la démarche qui a été suivie dans l'étude de l'exemple de résolution d'un système d'équations aux dérivées partielles où les organes additionnels de codage et de décodage ont été supprimés. Cette démarche conduit, pour un problème donné à des modules de calcul spécialisés. Afin d'obtenir un circuit de calcul économique, il semble indispensable de concevoir ces modules sous forme cablée, donc à structure figée. La seule possibilité de modifications du schéma est alors de modifier l'interconnection des modules (par exemple, pour la simulation de l'échangeur thermique, modification de la discrétisation ; dans un réseau à deux dimensions, modification de la frontière, etc...).

Ainsi, une "optimisation" du calculateur en représentation stochastique, tant sur le plan des performances que du prix conduit à une structure très spécialisée. Ce point nous paraît être un des plus important de cette étude.

Il est évident que cette haute spécialisation limite le domaine d'applications à des problèmes qui à eux seuls nécessiteront la construction d'un

calculateur. Compte tenu des progrès actuels en matière d'intégration à moyenne et grande échelle, cette limitation ne semble pas rédhibitoire. En effet, l'examen des performances montre qu'un domaine est très bien adapté aux propriétés de la représentation stochastique, celui de la commande en temps réel de processus physico chimiques complexes. Dans le cas d'une commande par calculateur numérique, il peut être particulièrement intéressant de réserver la réalisation d'un modèle à un bloc de calcul spécialisé en représentation stochastique, déchargeant le calculateur numérique d'une tâche ou il n'est pas particulièrement bien adapté et lui conservant les tâches propres à la commande et au contrôle du processus.

Cet aspect de périphérique spécialisé de calculateur numérique nous amène à parler de l'autre domaine d'applications, qui est celui de la construction d'opérateurs spécialisés ayant une fonction de calcul moins complexe et qui pourront se rencontrer comme périphériques d'entrée sortie d'un calculateur (pré-traitement, mise en forme d'informations) ou bien associés à un élément de mesure.

6.4. Perspectives en matière d'opérateurs spécialisés

L'usage de la représentation stochastique peut être particulièrement intéressant pour la construction d'opérateurs relativement simples, un exemple en est fourni par le M.I.M.

Ici, il n'y a pas de problème de découpage, la complexité du circuit de calcul restant du même ordre de grandeur que celle d'une cellule d'un circuit complexe. Le problème de la réalisation de séquences indépendantes est plus facilement résolu, le domaine d'emploi est alors déterminé par les performances.

L'examen de ces performances (cf chapitre 4 et 5) montre que de tels opérateurs seraient parfaitement applicables à la plupart des problèmes industriels. Un exemple voisin du M.I.M. est celui des compteurs d'énergie (multiplication-intégration), d'autres exemples du même ordre seront fournis

par des mises en forme et corrections de mesures physiques ou chimiques.

Un autre cas sera la réalisation d'opérateurs insérables dans un calculateur analogique (comme le M.I.M.) et répondant à des impératifs particuliers en matières de performances.

Pour ce genre d'applications, la spécialisation n'est pas un obstacle et on peut penser qu'il existe un assez grand nombre d'exemple où la demande justifierait l'étude et la réalisation d'un circuit intégré à grande échelle. En effet, des performances acceptables ont été obtenues avec le module M.I.M. utilisant une fréquence de base inférieure à 1 MHz donc compatible avec une intégration en technologie M.O.S., technologie qui permet d'envisager l'intégration de circuits assez complexes sur une même pastille. Ces performances paraissent compatibles avec beaucoup de mesures physiques.

Si cette optique d'intégration d'un opérateur sur une pastille, qui permet d'envisager des coûts très faibles dès que la demande est assez importante est très bien adaptée aux d'entrées numériques, il n'en est pas tout à fait de même pour les entrées analogiques. La solution adoptée au chapitre 5 pour la construction du M.I.M. n'est pas très satisfaisante car elle impose l'emploi d'un convertisseur numérique analogique rapide. Il semble préférable de se limiter au cas des entrées numériques en utilisant éventuellement des convertisseurs analogique-numérique pour les entrées analogiques. Les contraintes sur un tel convertisseur analogique-numérique d'entrée sont en effet beaucoup moins sévères : le temps de réponse n'est déterminé que par la dynamique des signaux d'entrée, qui est nécessairement faible si on envisage l'emploi d'opérateurs en représentation stochastique. De tels convertisseurs analogique-numérique relativement lents mais bon marché devraient en effet se répandre de plus en plus dans le domaine de l'instrumentation et de la mesure (voir en particulier (A7), (A8) l'exemple de tels convertisseurs utilisant précisemment la représentation stochastique).

CONCLUSION

Diverses publications traitent de la représentation stochastique de l'information, mais aucune étude des problèmes de réalisation n'avait été publiée jusqu'à présent dans le domaine du traitement d'informations. L'étude que nous présentons ici avait pour but d'essayer de combler cette lacune. C'est en partant des résultats obtenus par HIRSCH (A7) dans le domaine des conversions numérique analogique utilisant la représentation stochastique de l'information que nous avons essayé de dégager les principes d'une réalisation pseudo-aléatoire originale.

L'examen des performances dans une conception strictement aléatoire a conduit à éliminer celle-ci et à chercher à tirer le meilleur parti des propriétés d'une conception pseudo-aléatoire. Quoique cette conception pseudo-aléatoire ait été proposée dans deux publications (A1,A5), il ne semble pas que leurs auteurs se soient intéressés à l'optimisation des performances.

L'utilisation de générateurs de bruit pseudo-aléatoires à courte période, si elle permet d'améliorer les performances précision-vitesse, a pour inconvénient de limiter le nombre de variables codées à l'aide de séquences indépendantes.

Aussi la recherche a particulièrement porté sur deux points : l'étude du générateur de bruit, de façon à obtenir le meilleur compromis possible entre les performances et le nombre d'opérateurs algébriques ; puis l'étude de l'organisation du calcul la mieux adaptée aux propriétés des opérateurs en représentation stochastique.

Le générateur de bruit étant en fait un automate déterministe, nous avons utilisé une formulation algébrique pour son étude. Mais le critère de pseudo-indépendance nous a permis de conserver la formulation probabiliste, plus simple, des opérateurs.

Certains résultats n'ont pu être démontrés, nous avons alors adopté une approche plus ou moins statistique (tests d'intercorrélation,...). Cette

méthode semi expérimentale a cependant permis d'obtenir des résultats exploitables. Le but que nous avons poursuivi était de concevoir et de réaliser des structures de calcul plutôt que de faire une étude systématique de la représentation stochastique. Il nous semble que les résultats obtenus dans cette étude justifieraient maintenant une étude théorique plus complète, en particulier l'étude du générateur de séquences optimal et l'étude de la précision en décodage en régime dynamique.

Les résultats obtenus à l'aide du module M.I.M. nous ont montré qu'à côté de l'application prévue initialement à la conception de calculateurs spécialisés complexes, il existait un domaine d'application particulièrement intéressant dans la réalisation d'opérateurs de faible complexité. Ce type d'application peut se rencontrer dans beaucoup de problèmes. Nous citerons par exemple :

- Les problèmes de commande par calculateur : périphériques spécialisés effectuant un traitement simple : prétraitement, mise en forme, stations de transfert....
- Les éléments de mesure : compteurs d'énergie, mesures de débit, corrections de mesures ...
- Les régulations analogiques : réalisation de correcteurs plus ou moins spécialisés
- La réalisation de petits calculateurs spécialisés : en aéronautique (navigation,...) en automobile (calculateurs d'injection, de freinage).

La représentation stochastique peut également être considérée comme un outil supplémentaire pour la réalisation de calculateurs spécialisés, conjointement avec d'autres techniques (numériques, incrémentales ou analogiques).

Avec les éléments obtenus au cours des cinq premiers chapitres, nous avons essayé dans le sixième de préciser quelle devrait être l'organisation d'un calculateur en représentation stochastique. Nous avons vu qu'il était possible de tirer au mieux parti des propriétés de la conception aléatoire,

au moins dans un certain nombre de problèmes, en définissant une structure modulaire. Le calculateur est alors un réseau de modules spécialisés, chaque module résolvant une partie du problème global, qui est lui même résolu par le fonctionnement parallèle de tous ces modules.

L'inconvénient majeur de telles structures est leur manque de souplesse dû à la réalisation de modules cablés. Cet inconvénient ne peut être compensé que par un coût de réalisation faible devant toute autre réalisation à performances égales. Les résultats obtenus à l'heure actuelle semblent justifier cette ambition.

Un des domaines paraissant bien adapté à une telle conception est la réalisation de modèles de processus physico chimiques fonctionnant en temps réel permettant par exemple de faire une identification en temps réel ou une commande adaptative directe. L'élaboration des lois d'identification ou d'adaptation reste alors à la charge du calculateur numérique ainsi que celle des lois de commande. Les méthodes modernes de commande des processus requièrent en effet des moyens de calcul très importants. Le coût de ces moyens semble à l'heure actuelle être un obstacle important à leur mise en oeuvre.

Compte tenu des possibilités actuelles offertes par la microélectronique, la représentation stochastique doit permettre la réalisation de structures de calcul spécialisées de faible coût. Les performances de ces structures de calcul (plusieurs dizaines de Hz à 1%) restent compatibles avec les informations de la plupart des capteurs de mesures physiques. La représentation stochastique est un nouvel outil pour la réalisation de structures de calcul. Pour exploiter les propriétés particulières de cet outil, il est nécessaire de dégager la meilleure organisation de calcul, on est par là amené à aborder le problème de la conception d'un calculateur stochastique d'une manière différente de celle qu'on utiliserait avec une autre technique.
C'est là une règle générale : un nouvel outil doit permettre de dépasser le problème initial en autorisant l'introduction de nouvelles méthodes. C'est à notre avis dans cette voie que doivent se poursuivre les recherches.

ANNEXES

1. Corps de Galois GF(2)

Un corps de Galois est un corps fini. Nous nous intéresserons du corps de Galois de module 2 GF(2), ensemble à deux éléments 0 et 1 :

$$GF(2) = \{0,1\}$$

La loi additive est l'addition modulo 2 :

x	y	x ⊕ y
o	o	o
o	1	1
1	o	1
1	1	o

On peut vérifier que cette loi est une loi de groupe commutatif dont l'élément neutre est 0 et ou tout élément est son propre inverse. L'addition modulo 2 est équivalente à la disjonction de l'algèbre de Boole.

La loi multiplicative est le produit habituel :

x	y	x.y
o	o	o
o	1	o
1	o	o
1	1	1

La loi multiplicative est associative, commutative, a pour élément neutre 1. Tout élément différent de 0, élément neutre de la loi additive(donc égal à 1), a un inverse, qui est lui-même.

La loi multiplicative est distributive par rapport à la loi additive. L'ensemble GF(2) est donc bien un corps.

On peut construire un espace vectoriel $|GF(2)|^n$ sur GF(2) de la même manière que pour l'ensemble des nombres réels. $|GF(2)|^n$ est l'ensemble des vecteurs à n composantes éléments de GF(2). Il s'agit bien d'un espace vectoriel muni de la loi additive X + Y (addition modulo 2 de toutes les composants) et de la loi de multiplication externe λX ou λ=o ou 1 est un élément de GF(2).

Dans l'espace vectoriel $|GF(2)|^n$, on peut définir des applications linéaires, représentables par des matrices. Toutes les propriétés classiques des matrices construites sur l'ensemble des réels subsistent. En particulier, le théorème de CAYLEY-HAMILTON reste valable (B2,B3). L'ensemble des matrices carrées d'ordre n constitue un anneau non commutatif.

On peut également définir des polynômes de degré n sur GF(2). Cet ensemble constitue un anneau commutatif. On peut définir la divisibilité des polynômes (B1,B2) comme pour les polynômes réels : P(x) divise Q(x) si toutes les racines de P(x) sont racines de Q(x).

La différence fondamentale, outre le nombre d'éléments fini, avec le corps des réels est qu'un polynôme de degré quelconque n'a pas nécessairement de racines sur GF(2). Par suite, une matrice d'ordre quelconque n'est généralement pas diagonalisable.

2. Algorithme de calcul des fonctions d'intercorrélations des séquences

Soient deux séquences périodiques

$X = \{x_1, x_2, \ldots\ldots, x_L\}$

$Y = \{y_1, y_2, \ldots\ldots, y_L\}$

L'intercorrélation de X et Y est donnée par :

$$R_{XY}(\tau) = \frac{1}{L} \sum_{i=1}^{L} x_i \cdot y_{i-\tau}$$

ou x_i et y_j ont pour valeurs 0 ou 1. Si on cherche l'ensemble des valeurs de $R_{XY}(\tau)$ pour τ variant entre 0 et L-1, nous aurons à effectuer

L produits (que l'on peut remplacer par des intersections logiques)
L-1 sommes

par valeur de τ, soit

L^2 produits (ou intersections logiques)
L(L-1) sommes

au total.

En remarquant que l'expression $x_i\ y_j$ est nulle sauf si $x_i=y_j=1$, on peut écrire un algorithme plus rapide.

Nous allons caractériser X par la suite d'indices

$S_X = \{i_1, i_2, \ldots\ldots, i_k\}$

tels que $x_{ih}=1$

k est donc égal au nombre de "1" dans la séquence $X = \{..\ x_i ..\}$

De même, caractérisons y par :

$S_Y = \{j_1, j_2, \ldots, j_l\}$

tels que $y_{jh}=1$

Alors un produit $x_i\ y_{i+\tau}$ sera non nul siet seulement si

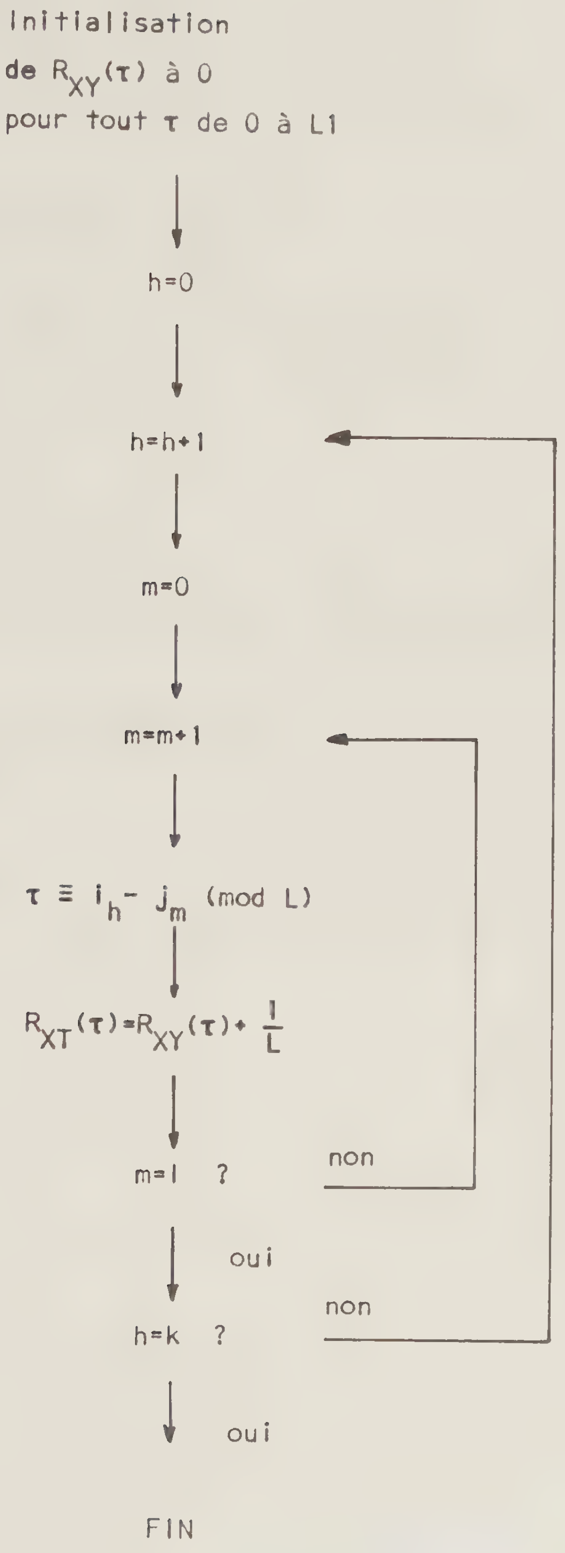
$i \ \varepsilon \ S_X$

$i+\tau \ \varepsilon \ S_Y$

Par suite, toute différence i_h-j_m ou $i_h \varepsilon S_X$ $j_m \varepsilon S_Y$ correspond à un produit non nul dans l'expression de

$R_{XY}\ (i_n-j_m)$

D'où l'organigramme :



Ce programme nécessite l.k soustractions et l.k additions

Or $\frac{l}{L}$ = Pr(X=1) et $\frac{k}{L}$ = Pr(Y=1)

Le nombre de calculs nécessaires est approximativement multiplié par Pr(X=1) . Pr(Y=1), toujours inférieur à 1. Le gain est d'autant plus grand que les probabilités sont faibles (notons que si celles ci sont grandes on peut déduire le résultat de l'intercorrélation des séquences complémentées).

Programme de génération du bruit :

Ce programme range dans le tableau IBR les 2^n-1 valeurs du bruit issu d'un registre à décalage de polynôme caractéristique

$$1 \oplus x^P \oplus x^n = 0$$

dont on utilise q bits
(programme valable uniquement sur des machines effectuant les opérations logiques sur tous les bits : en particulier IBM 360, UNIVAC 1107/8)

```
      SUBROUTINE BRUIT 2 (N,P,Q,IBR)
      DIMENSION IBR(1)
      INTEGER Q,P
      LOGICAL S,SB,SC
      EQUIVALENCE (S,MASQ), (SB,MB), (SC,M)
      MB=1
      L+2xx(N-1)
      LQ=2xx(N-Q)
      LG=2xL-1
      MASQ=1+2xx(N-P)
      DO 1 I=1,LG
      SC=S.AND.SB
      J=L
      IF((M.EQ.0).OR.(M.EQ.MASQ))J=0
      MB=MB/2+J
    1 IBR(1)=MB/LQ
    RETURN
    END
```

La simulation d'opérateurs stochastiques ne pose pas de problème particulier.

BIBLIOGRAPHIE

A. Représentation stochastique

A1. GAINES (B.R.)
"Stochastic Computer Thrives on Noise" Electronics vol. 40 (1967), July 10, n° 14, pp 72-79

L'auteur définit les opérateurs en représentation stochastique monofilaire. L'accent est mis sur les possibilités offertes par les progrès technologiques (intégration à moyenne et large échelle). L'auteur tente également de situer le calculateur stochastique par rapport aux calculateurs analogiques et numériques conventionnels.

A2. GAINES (B.R.)
"Techniques of Identification with the stochastic Computer" IFAC Symposium, Prague (1967)

L'auteur envisage plusieurs algorithmes classiques d'identification en utilisant un calculateur stochastique. Il montre l'intérêt d'un identificateur basé sur la méthode de " steepest descent" réalisé à l'aide d'opérateurs stochastiques.

A3. GAINES (B.R.)
"Computers, Stochastic" dans "Encyclopédia of Linguistic, Information and Control". Pergamon Press, London (1969)

L'auteur formalise les notions de l'article (A1) en introduisant les concepts d'automate stochastiques.

A4. RIBEIRO (S.T.)
"Randon Pulse Machines" IEEE Tr on Electronic Computers, vol EC 16 (1967), June, n° 3, pp 261-277.

L'auteur tente un rapprochement entre la représentation stochastique et le système nerveux humain. Il reprend d'autre part, les principales

définitions et introduit les représentations bifilaires, trifilaires ou quadrifilaires.

A5. FERRATE (G.A.) PUIGJANER (L) AGULLO (L)
"Introduction to multichannel stochastic computation and control"
IFAC Congres, Varsovie (1969)

Les auteurs abordent les problèmes de précision statique et dynamique à partir d'un modèle strictement aléatoire. Ils proposent de plus un codage en virgule flottante.

A6. PUPPELBAUM (W.J.) AFUSO (C) ESCH (J.W.)
"Stochastic computing elements and systems" Fall Joint Computer Conference (1969)

Le codage à partir d'une source de bruit analogique et des opérateurs matriciels sont décrits avec comme application envisagée la reconnaissance des formes optiques.

A7. HIRSCH (J.J.)
"Contribution à l'étude des conversions numérique analogique et analoqique numérique au moyen d'une représentation stochastique de l'information" Thèse de Docteur Ingénieur, Université de Grenoble,
28 juillet 1970.

L'auteur montre, pour la première fois, l'intérêt de l'utilisation d'un générateur pseudo-aléatoire en matière de précision. Une étude approfondie du codage numérique stochastique et du décodage stochastique analogique est exposée. Une application aux convertions d'informations est proposée.

A8. HIRSCH (J.J.) CHEVALIER (G)
"Apport de la microélectronique dans la conception des nouveaux organes de commande des processus industriels"
Colloque Microélectronique, PARIS, 6-10 avril 1970

B. Génération de bruit

B1. PETERSON (W.W.)
"Error correcting codes" MIT Press, Cambridge et Wiley, NEW YORK (1961)

Cet ouvrage comporte une très importante table de polynômes caractéristiques de registre contre réactionnés délivrant une séquence de longueur maximale.

B2. GALLAGER (R.G.)
"Information theory and reliable communication"
Wiley, NEW YORK (1968)

B3. GOLOMB (S.W.)
"Shift register sequences"
Holden-Day, SAN FRANCISCO (1967)

B4. EVERETT
"Pseudo noise sequences" dans "Encyclopedia of Linguistics, Information and control" Pergamon press, LONDON (1969)

Ces deux ouvrages et cet article font le point sur la génération et les propriétés des séquences binaires pseudo-aléatoires obtenues à l'aide de registres à décalage.

B5. TAUSWORTHE (R.C.)
"Random numbers generated by linear recurrence modulo two"
Math of computation, vol 19, n° 90, april 1965

L'auteur indique le procédé de génération de nombres pseudo-aléatoires par codage binaire d'un certain nombre de bits d'un registre à décalage contre réactionné.

B6. HULL, DOBEL
"Random number generators"
S.I.A.M. Review vol 4, n° 3, july 1962

B7. GREENBERGER
"An a priori determination of serial correlation in computer generated random numbers" Math of Computation vol 15 (1961)

B8. TAUSSKY, TODD
"Generation and Testing of pseudo random numbers" Symposium on Monte Carlo Methods, édité par Meyer (NEW YORK) (1956)

Ces trois articles indiquent un certain nombre de procédés de génération de nombres aléatoires. Le premier comporte une très importante bibliographie.

C. Applications

C1. LANDAU (I.D.) SINNER (E)
Journée d'étude sur les systèmes adaptatifs
Grenoble 11 février 1970

C2. GILLES (G)
"Vers la précision dans les modèles mathématiques des échangeurs thermiques"
C.R. Académie des Sciences, PARIS, T 267, pp 418-421, 4 novembre 1968

C3. HIRSCH (J.J.) ZIRPHILE (J)
"Implementation of DPS models using stochastic representation"
IFAC Symposium on the control of distributed parameter systems. Bonff (Canada) 21-23 juin 1971

D. Divers

D1. LANING (J) BATTIN (R)
"Processus stochastiques et systèmes asservis" Dunod 1959

D2. STERN (J) BARBEYRAC (J. de) POGGI (R)
"Méthodes pratiques d'études des fonctions aléatoires" Dunod 1967

D3. SRINIVASAN (S.K.)
"Stochastic theory and cascade process" Dans la série : Modern Analytic and computationnel methods in science and mathematics, n° 15, ELSEVIER (1969)

D4. BEKEY (G.A.) KARPLUS (W.J.)
"Hybrid computation" John Wiley (1968)

D5. MONJALLON (A)
"Elements de statistiques mathématiques" VUIBERT (1963)

Dernière page d'une thèse

VU

Grenoble, le

Le Président de la thèse

VU, et permis d'imprimer,

Grenoble, le

Le Président de l'Université Scientifique
et Médicale de Grenoble